APR 20 1937

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 177

Heft 1

Ausgegeben am 18. März 1937

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin W 35 und Leipzig

1937

Band 177. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Reichardt, Hans, Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Galoisgruppe von Primzahlpotenzordnung	1
Suetuna, Zyoiti, Abhängigkeit der L-Funktionen in gewissen algebraischen Zahlkörpern	6
Neumer, Walter, Die gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung, die lineare homogene Form erhalten können. II.	13
Damköhler, Wilhelm, Struktur der geschlossenen rektifizierbaren Kurven	37
Rohrbach, Hans, Ein Identitätssatz für Polynome	55
Keller, Ott-Heinrich, Ein Satz über die lückenlose Erfüllung des 5- und 6-dimensionalen Raumes mit Würfeln	61

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Galoisgruppe von Primzahlpotenzordnung.

Von *Hans Reichardt* in Jena.

Es soll hier die Aufgabe gelöst werden, *über einem gegebenen Zahlkörper* Ω *endlichen Grades einen Körper zu konstruieren, der normal über* Ω *mit einer zu einer gegebenen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *von ungerader Primzahlpotenzordnung* l^n *isomorphen Galoisgruppe ist.*

Diese Aufgabe läßt sich auf folgende zurückführen: *Einen absoluten Normalkörper* K *mit zu* $\mathfrak{G}$ *isomorpher Galoisgruppe zu konstruieren, dessen „Sockel"* $\Sigma(\mathsf{K})$ *eine zu einer gegebenen ganzen rationalen Zahl* a *teilerfremde Diskriminante hat.* Dabei soll $\Sigma(\mathsf{K})$ das Kompositum aller zyklischen Teilkörper l-ten Grades von K sein. — Ist nämlich diese Aufgabe gelöst, so wende ich sie auf den Fall an, daß a die Diskriminante des zu Ω gehörigen absoluten Normalkörpers N ist. Ist dann $\Delta = \mathsf{N} \frown \mathsf{K}$, so geht die Diskriminante von $\Sigma(\Delta)$ wegen $\Sigma(\Delta) \leqq \mathsf{N}$ in a auf; anderseits ist sie, da offenbar $\Sigma(\Delta) \leqq \Sigma(\mathsf{K})$, prim zu a, also ist sie 1, so daß $\Sigma(\Delta)$ der Körper P der rationalen Zahlen ist. Nun ist für einen beliebigen von P verschiedenen absoluten Normalkörper von l-Potenzgrad der Sockel $\neq \mathsf{P}$, da seine Galoisgruppe metazyklisch ist. Daher ist $\Delta = \mathsf{P}$ und damit erst recht $\Omega \frown \mathsf{K} = \mathsf{P}$, also ist $\mathsf{K}\Omega/\Omega$ normal mit zu $\mathfrak{G}$ isomorpher Galoisgruppe.

Die in dieser zweiten Aufgabe geforderte Konstruktion geht so vor sich: Setze ich $\mathfrak{G}_n = \mathfrak{G}$, ist weiter $\mathfrak{H}_\nu$ für $\nu = n, n-1, \ldots, 1$ eine (stets existierende) Untergruppe der Ordnung l des Zentrums von $\mathfrak{G}_\nu$ und ist $\mathfrak{G}_\nu/\mathfrak{H}_\nu = \mathfrak{G}_{\nu-1}$, so ist entsprechend dieser Reihe von Faktorgruppen eine Reihe von absoluten Normalkörpern $\mathsf{K}_0 < \mathsf{K}_1 < \cdots < \mathsf{K}_n$ zu konstruieren, deren Galoisgruppen zu $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ isomorph sind und deren Sockel zu a prime Diskriminanten haben. Diese schrittweise zu vollziehende Konstruktion wird nun offenbar durch folgenden Einbettungssatz ermöglicht[1]), dessen Voraussetzungen für $\nu = 1$ trivialerweise erfüllt sind:

Liegt $\mathsf{K}_{\nu-1}$ *für ein* $\nu < n$ *bereits vor und sind seine Diskriminantenteiler, soweit sie von* l *verschieden sind, fleißig (d. h. zerfallen sie in Primideale ersten Grades) und* $\equiv 1 \pmod{l^n}$, *so läßt sich* $\mathsf{K}_{\nu-1}$ *in einen Körper einbetten, der absolut normal mit zu* $\mathfrak{G}_\nu$ *isomorpher Galoisgruppe ist, dessen Diskriminantenteiler* $\neq l$ *wieder fleißig und* $\equiv 1 \pmod{l^n}$ *sind und dessen Sockel eine zu* a *prime Diskriminante hat.*

Ich beweise diesen Satz zunächst für den einfachen Fall, daß $\mathfrak{H}_\nu$ direkter Faktor von $\mathfrak{G}_\nu$ ist. Es gibt eine nicht in a aufgehende Primzahl p, die in $\mathsf{K}_{\nu-1}\left(e^{\frac{2\pi i}{l^n}}, \sqrt[l]{p_1}, \ldots, \sqrt[l]{p_k}\right)$

[1]) Mit Hilfe eines etwas anderen Einbettungssatzes löst A. Scholz die zuerst genannte Aufgabe in der soeben erschienenen Arbeit: Konstruktion algebraischer Zahlkörper mit beliebiger Gruppe von Primzahlpotenzordnung, Math. Zeitschr. **42** (1937). Erst zum Schluß (vgl. Anm. 7) verwende ich ähnliche Überlegungen, wie sie zuerst bei Scholz vorkommen.

Band 177. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Reichardt, Hans, Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Galoisgruppe von Primzahlpotenzordnung	1
Suetuna, Zyoiti, Abhängigkeit der L-Funktionen in gewissen algebraischen Zahlkörpern	6
Neumer, Walter, Die gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung, die lineare homogene Form erhalten können. II.	13
Damköhler, Wilhelm, Struktur der geschlossenen rektifizierbaren Kurven	37
Rohrbach, Hans, Ein Identitätssatz für Polynome	55
Keller, Ott-Heinrich, Ein Satz über die lückenlose Erfüllung des 5- und 6-dimensionalen Raumes mit Würfeln	61

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Galoisgruppe von Primzahlpotenzordnung.

Von *Hans Reichardt* in Jena.

Es soll hier die Aufgabe gelöst werden, *über einem gegebenen Zahlkörper* Ω *endlichen Grades einen Körper zu konstruieren, der normal über* Ω *mit einer zu einer gegebenen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *von ungerader Primzahlpotenzordnung* l^n *isomorphen Galoisgruppe ist.*

Diese Aufgabe läßt sich auf folgende zurückführen: *Einen absoluten Normalkörper* K *mit zu* $\mathfrak{G}$ *isomorpher Galoisgruppe zu konstruieren, dessen „Sockel"* $\Sigma(\mathsf{K})$ *eine zu einer gegebenen ganzen rationalen Zahl* a *teilerfremde Diskriminante hat.* Dabei soll $\Sigma(\mathsf{K})$ das Kompositum aller zyklischen Teilkörper l-ten Grades von K sein. — Ist nämlich diese Aufgabe gelöst, so wende ich sie auf den Fall an, daß a die Diskriminante des zu Ω gehörigen absoluten Normalkörpers N ist. Ist dann $\Delta = \mathsf{N} \frown \mathsf{K}$, so geht die Diskriminante von $\Sigma(\Delta)$ wegen $\Sigma(\Delta) \leqq \mathsf{N}$ in a auf; anderseits ist sie, da offenbar $\Sigma(\Delta) \leqq \Sigma(\mathsf{K})$, prim zu a, also ist sie 1, so daß $\Sigma(\Delta)$ der Körper P der rationalen Zahlen ist. Nun ist für einen beliebigen von P verschiedenen absoluten Normalkörper von l-Potenzgrad der Sockel $\neq \mathsf{P}$, da seine Galoisgruppe metazyklisch ist. Daher ist $\Delta = \mathsf{P}$ und damit erst recht $\Omega \frown \mathsf{K} = \mathsf{P}$, also ist $\mathsf{K}\Omega/\Omega$ normal mit zu $\mathfrak{G}$ isomorpher Galoisgruppe.

Die in dieser zweiten Aufgabe geforderte Konstruktion geht so vor sich: Setze ich $\mathfrak{G}_n = \mathfrak{G}$, ist weiter $\mathfrak{H}_\nu$ für $\nu = n, n-1, \ldots, 1$ eine (stets existierende) Untergruppe der Ordnung l des Zentrums von $\mathfrak{G}_\nu$ und ist $\mathfrak{G}_\nu/\mathfrak{H}_\nu = \mathfrak{G}_{\nu-1}$, so ist entsprechend dieser Reihe von Faktorgruppen eine Reihe von absoluten Normalkörpern $\mathsf{K}_0 < \mathsf{K}_1 < \cdots < \mathsf{K}_n$ zu konstruieren, deren Galoisgruppen zu $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ isomorph sind und deren Sockel zu a prime Diskriminanten haben. Diese schrittweise zu vollziehende Konstruktion wird nun offenbar durch folgenden Einbettungssatz ermöglicht[1]), dessen Voraussetzungen für $\nu = 1$ trivialerweise erfüllt sind:

Liegt $\mathsf{K}_{\nu-1}$ *für ein* $\nu < n$ *bereits vor und sind seine Diskriminantenteiler, soweit sie von* l *verschieden sind, fleißig (d. h. zerfallen sie in Primideale ersten Grades) und* $\equiv 1 \pmod{l^n}$, *so läßt sich* $\mathsf{K}_{\nu-1}$ *in einen Körper einbetten, der absolut normal mit zu* $\mathfrak{G}_\nu$ *isomorpher Galoisgruppe ist, dessen Diskriminantenteiler* $\neq l$ *wieder fleißig und* $\equiv 1 \pmod{l^n}$ *sind und dessen Sockel eine zu* a *prime Diskriminante hat.*

Ich beweise diesen Satz zunächst für den einfachen Fall, daß $\mathfrak{H}_\nu$ direkter Faktor von $\mathfrak{G}_\nu$ ist. Es gibt eine nicht in a aufgehende Primzahl p, die in $\mathsf{K}_{\nu-1}\left(e^{\frac{2\pi i}{l^n}}, \sqrt[l]{p_1}, \ldots, \sqrt[l]{p_k}\right)$

[1]) Mit Hilfe eines etwas anderen Einbettungssatzes löst A. Scholz die zuerst genannte Aufgabe in der soeben erschienenen Arbeit: Konstruktion algebraischer Zahlkörper mit beliebiger Gruppe von Primzahlpotenzordnung, Math. Zeitschr. **42** (1937). Erst zum Schluß (vgl. Anm. 7) verwende ich ähnliche Überlegungen, wie sie zuerst bei Scholz vorkommen.

voll zerfällt, wobei $p_1, \ldots, p_k$ die Diskriminantenteiler von $\mathsf{K}_{\nu-1}$ sind. Nach dem Zerlegungsgesetz in $\mathsf{P}\left(e^{\frac{2\pi i}{l^n}}\right)$ ist $p \equiv 1 \pmod{l^n}$. Es sei nun Λ der Teilkörper l-ten Grades des Körpers der p-ten Einheitswurzeln. Da p in $\mathsf{P}(\sqrt[l]{p_\varkappa})$ voll zerfällt, ist $x_\varkappa^l \equiv p_\varkappa \pmod{p}$ lösbar. Nach dem Zerlegungsgesetz in Λ folgt daraus, daß $p_\varkappa$ in Λ voll zerfällt. Daher sind $p, p_1, \ldots, p_k$ die Diskriminantenteiler $\neq l$ von $\Lambda\mathsf{K}_{\nu-1}$, und zwar sind sie fleißig und $\equiv 1 \pmod{l^n}$. Da offenbar $\Sigma(\Lambda\mathsf{K}_{\nu-1}) = \Lambda\Sigma(\mathsf{K}_{\nu-1})$, hat der Sockel eine zu a prime Diskriminante, und da schließlich $\Lambda\mathsf{K}_{\nu-1}$ eine zu $\mathfrak{G}_\nu$ isomorphe Galoisgruppe hat, ist der Einbettungssatz für den Fall, daß $\mathfrak{H}_\nu$ direkter Faktor von $\mathfrak{G}_\nu$ ist, bereits bewiesen.

Es sei nun also $\mathfrak{H}_\nu$ kein direkter Faktor von $\mathfrak{G}_\nu$. H sei erzeugendes Element von $\mathfrak{H}_\nu$ und G_u sei Vertreter in $\mathfrak{G}_\nu$ des Elementes u von $\mathfrak{G}_{\nu-1}$. Es ist dann

$$G_u G_v = G_{uv} H^{a_{u,v}}.$$

Dem Einbettungsproblem ordne ich folgendermaßen ein verschränktes Produkt $\mathfrak{A}$ zu [2]): ζ sei primitive l-te Einheitswurzel, weiter sei $\overline{\mathsf{K}}_{\nu-1} = \mathsf{K}_{\nu-1}(\zeta)$ und $\overline{\mathsf{P}} = \mathsf{P}(\zeta)$. Da $\overline{\mathsf{P}}$ und $\mathsf{K}_{\nu-1}$ teilerfremde Grade haben, hat $\overline{\mathsf{K}}_{\nu-1}/\overline{\mathsf{P}}$ eine zu $\mathfrak{G}_{\nu-1}$ isomorphe Galoisgruppe. $\mathfrak{A}$ sei dann das verschränkte Produkt von $\overline{\mathsf{K}}_{\nu-1}/\overline{\mathsf{P}}$ mit seiner Galoisgruppe beim Faktorensystem $\zeta^{a_{u,v}}$. (Daß das wirklich ein Faktorensystem ist, folgt aus der Assoziativität in $\mathfrak{G}_\nu$.) Ich will zunächst zeigen, daß $\mathfrak{A}$ zerfällt. Da $\overline{\mathsf{P}}$ wegen $l \neq 2$ total imaginär ist, da weiter in der Diskriminante von $\mathfrak{A}/\overline{\mathsf{P}}$ höchstens Primteiler der Diskriminante von $\overline{\mathsf{K}}_{\nu-1}/\overline{\mathsf{P}}$ aufgehen [3]) (denn das Faktorensystem besteht aus Einheiten), da schließlich eine nicht zerfallende einfache Algebra mindestens zwei Verzweigungsstellen über ihrem Zentrum besitzt und l in $\overline{\mathsf{P}}$ Potenz *eines* Primideals ist, genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{A}$ für die Primteiler von $p_1, \ldots, p_k$ in $\overline{\mathsf{P}}$ zerfällt. Ist $\mathfrak{p}$ ein solches Primideal, so ist die bei $\mathfrak{p}$-adischer Erweiterung von $\overline{\mathsf{P}}$ entstehende Algebra $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ ähnlich dem verschränkten Produkt $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}^*$ von $\overline{\mathsf{K}}_{\nu-1\,\mathfrak{P}}/\overline{\mathsf{P}}_\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{P}$ Primteiler von $\mathfrak{p}$ in $\overline{\mathsf{K}}_{\nu-1}$) mit seiner der Zerlegungsgruppe von $\overline{\mathsf{K}}_{\nu-1}/\overline{\mathsf{P}}$ für $\mathfrak{P}$ gleichen Galoisgruppe beim entsprechenden Teilfaktorensystem $\zeta^{a_{u,v}}$. Bilden nun z_u eine den Elementen u entsprechende Basis von $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}^*/\overline{\mathsf{K}}_{\nu-1\,\mathfrak{P}}$ mit

$$z_u z_v = z_{uv} \zeta^{a_{u,v}},$$

und ist u_0 erzeugendes Element und e die Ordnung der Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{P}$ (diese ist ja zyklisch, da $\mathfrak{p}$ fleißig in $\overline{\mathsf{K}}_{\nu-1}$ und kein Teiler von l ist), so setze ich $z'_{u_0^\lambda} = z_{u_0}^\lambda$ für $0 \leqq \lambda < e$. Dann ist, wenn $0 \leqq \lambda' < e$,

$$z'_{u_0^\lambda} z'_{u_0^{\lambda'}} = z_{u_0}^{\lambda+\lambda'} = \begin{cases} z'_{u_0^{\lambda+\lambda'}} & \text{für} \quad \lambda + \lambda' < e \\ z'_{u_0^{\lambda+\lambda'-e}} z_{u_0}^e & \text{für} \quad \lambda + \lambda' \geqq e. \end{cases}$$

Nun ist $z_{u_0}^e$ eine Potenz von ζ, also genügt es zu zeigen, daß ζ Norm für $\overline{\mathsf{K}}_{\nu-1\,\mathfrak{P}}/\overline{\mathsf{P}}_\mathfrak{p}$ ist. Wegen $p \equiv 1 \pmod{l^n}$ enthält $\overline{\mathsf{P}}_\mathfrak{p}$ die l^n-ten Einheitswurzeln, also ist ζ sogar eine l^{n-1}-te

[2]) Daß Einbettungsprobleme mit Fragen nach dem Zerfallen gewisser Algebren zusammenhängen, hat R. Brauer gezeigt in seiner Arbeit: Über die Konstruktion der Schiefkörper, die von endlichem Rang in bezug auf ein gegebenes Zentrum sind, dieses Journal **168** (1932). Vgl. auch K. Shoda, Über die endlichen Gruppen der Algebrenklassen mit einem Zerfällungskörper, Jap. Journal of Math. **11** (1934). — Die im folgenden benutzten hyperkomplexen Sätze sind etwa zu finden in: M. Deuring, Algebren, Ergebnisse d. Math. **4** (1935).

[3]) H. Reichardt, Die Diskriminante einer normalen einfachen Algebra, dieses Journal **173** (1935).

Potenz in $\overline{\mathsf{P}}_p$. Damit ist also das Zerfallen von $\mathfrak{A}$ nachgewiesen. In $\overline{\mathsf{K}}_{\nu-1}$ ist daher

$$\zeta^{a_{u,v}} = \frac{\xi_u^v \xi_v}{\xi_{uv}} . \tag{1}$$

Potenzieren mit l liefert $\xi_{uv}^l = \xi_u^{lv} \xi_v^l$, also ist in $\overline{\mathsf{K}}_{\nu-1}$ nach Speiser [4])

$$\xi_u^l = \mu'^{u-1} \text{ [5])}. \tag{2}$$

Ist t erzeugender Automorphismus von $\overline{\mathsf{K}}_{\nu-1}/\mathsf{K}_{\nu-1}$ und führt er ζ in ζ^g über, wobei g Primitivwurzel mod l ist, so folgt aus (1) durch Potenzieren mit $t-g$, da t mit v vertauschbar ist:

$$\xi_{uv}^{t-g} = \xi_u^{(t-g)v} \xi_v^{t-g},$$

also ist in $\overline{\mathsf{K}}_{\nu-1}$ wieder nach Speiser

$$\xi_u^{t-g} = \alpha^{u-1}. \tag{3}$$

Potenzieren mit $s = t^{l-2} + gt^{l-3} + \cdots + g^{l-2}$ gibt

$$\alpha^{(u-1)s} = \xi_u^{1-g^{l-1}}.$$

Es ist $1 - g^{l-1} = ml$ mit ganzem m. Nach (2) folgt dann

$$\alpha^{s(u-1)} = \mu'^{m(u-1)},$$

also ist

$$\mu'^m = \alpha^s b \quad \text{mit } b \text{ aus } \overline{\mathsf{P}}. \tag{4}$$

Ich kann g von vornherein so gewählt denken, daß $1 - g^{l-1}$ nur einmal durch l teilbar ist, daß also $l \nmid m$ ist. Dann ist $mx + ly = 1$ ganzzahlig lösbar. Potenzieren von (4) mit $x(t-g)$ gibt

$$\mu'^{(1-ly)(t-g)} = \alpha^{xml} b^{x(t-g)}.$$

Setze ich also

$$\mu = \frac{\mu'}{b^x}, \qquad \beta = \alpha^{xm} \mu'^{y(t-g)},$$

so ergibt sich

$$\mu^{t-g} = \beta^l. \tag{5}$$

Weiter ist nach (2)

$$\mu^{u-1} = \xi_u^l; \tag{6}$$

nach (4) ist

$$\beta^s = \mu^m \tag{7}$$

und nach (2) und (3)

$$\beta^{u-1} = \xi_u^{t-g}. \tag{8}$$

Dabei ist μ keine l-te Potenz in $\overline{\mathsf{K}}_{\nu-1}$; wäre nämlich $\mu = \varrho^l$, so wäre nach (6) $\varrho^{(u-1)l} = \xi_u^l$, also $\xi_u = \varrho^{u-1} \zeta^{x_u}$. Dann wäre nach (1) $\zeta^{a_{u,v}} = \zeta^{x_u + x_v - x_{uv}}$, also

[4]) A. Speiser, Zahlentheoretische Sätze aus der Gruppentheorie, Math. Zeitschrift **5** (1919).

[5]) Die sich hieraus ergebende Einbettbarkeit von $\overline{\mathsf{K}}_{\nu-1}$ in einen Körper, der normal über $\overline{\mathsf{P}}$ mit zu $\mathfrak{G}_\nu$ isomorpher Galoisgruppe ist, hätte sich auch durch Anwendung von Sätzen aus den Arbeiten von H. Richter, Über die Lösbarkeit einiger nicht-abelscher Einbettungsprobleme, und Über die Lösbarkeit des Einbettungsproblems für Abelsche Zahlkörper, Math. Annalen **112** (1936), begründen lassen, doch habe ich der Einheitlichkeit der Darstellung wegen davon abgesehen.

$a_{u,v} \equiv x_u + x_v - x_{uv} \pmod{l}$. Setze ich $G'_u = G_u H^{-x_u}$, so wäre

$$G'_u G'_v = G_u G_v H^{-x_u - x_v} = G_{uv} H^{a_{u,v} - x_u - x_v} = G_{uv} H^{-x_{uv}} = G'_{uv},$$

d. h. $\mathfrak{H}_v$ wäre wegen $G'_u H = H G'_u$ direkter Faktor von $\mathfrak{G}_v$.

Daher ist nach (5) und (6) $\overline{\mathsf{K}}_{v-1}\left(\sqrt[l]{\mu}\right)$ ein absoluter Normalkörper, und seine Galoisgruppe läßt sich, wenn $\mathsf{K}_{v-1} = \mathsf{P}(\vartheta)$, erzeugen durch

$$\overline{H} = \left(\sqrt[l]{\mu} \to \zeta \sqrt[l]{\mu}, \quad \vartheta \to \vartheta, \quad \zeta \to \zeta\right),$$

$$\overline{G}_u = \left(\sqrt[l]{\mu} \to \xi_u \sqrt[l]{\mu}, \quad \vartheta \to \vartheta^u, \quad \zeta \to \zeta\right),$$

$$\overline{T} = \left(\sqrt[l]{\mu} \to \beta \sqrt[l]{\mu^g}, \quad \vartheta \to \vartheta, \quad \zeta \to \zeta^g\right),$$

wobei nach (1), (7), (8) die Relationen gelten

$$\overline{H}^l = \overline{E}, \ \overline{G}_u \overline{H} = \overline{H G_u}, \ \overline{G}_u \overline{G}_v = \overline{G}_{uv} \overline{H}^{a_{u,v}};$$

$$\overline{H}\,\overline{T} = \overline{T H}, \ \overline{G}_u \overline{T} = \overline{T G_u}, \ \overline{T}^{q-1} = \overline{E}.$$

Daraus folgt aber sofort, daß der zu $\{\overline{T}\}$ gehörige Körper K'_v absolut normal mit zu $\mathfrak{G}_v$ isomorpher Galoisgruppe ist und K_{v-1} enthält.

Der so gewonnene Körper K'_v hat denselben Sockel wie K_{v-1}, da $\mathfrak{H}_v$ kein direkter Faktor von $\mathfrak{G}_v$ ist. Dagegen werden die übrigen arithmetischen Forderungen, die im Einbettungssatz an den einbettenden Körper gestellt werden, im allgemeinen noch nicht erfüllt sein. Man hat also K'_v so abzuändern, daß zwar die Galoisgruppe ungeändert bleibt, aber alle diese Forderungen erfüllt sind. Dazu benutze ich folgendes: Ist Λ ein beliebiger absolut zyklischer Körper vom Grad l mit der Galoisgruppe $\{S\}$, der nicht in K'_v enthalten ist, so ist die Galoisgruppe von $\Lambda\mathsf{K}'_v$ gleich dem direkten Produkt von $\{S\}$ mit der Galoisgruppe $\mathfrak{G}'_v$ von K'_v, und ist $\{H'\}$ die zu K_{v-1} gehörige Untergruppe von $\mathfrak{G}'_v$, so ist der zu $\{H'^\sigma S\}$ $(0 \leqq \sigma < l)$ gehörige Körper $\mathsf{K}'^{(\sigma)}_v$ absolut normal mit zu $\mathfrak{G}_v$ isomorpher Gruppe; denn $\{H'^\sigma S\}$ ist invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}'_v \times \{S\}$, und da H' im Zentrum von $\mathfrak{G}'_v$ liegt, ist

$$\mathfrak{G}'_v \times \{S\}/\{H'^\sigma S\} \cong \mathfrak{G}_v.$$

Jeder der l zwischen K_{v-1} und $\Lambda\mathsf{K}'_v$ liegenden, von $\Lambda\mathsf{K}_{v-1}$ verschiedenen Körper ist also absolut normal mit zu $\mathfrak{G}_v$ isomorpher Galoisgruppe [6]).

Es kann eintreten, daß eine Primzahl $p \neq l$ in K'_v verzweigt, aber in K_{v-1} noch unverzweigt ist [7]). Dann ist nach der Theorie der Trägheitsgruppe $\mathfrak{N}\mathfrak{P} \equiv 1 \pmod{l}$, wenn $\mathfrak{P}$ Primteiler von p in K'_v. Also ist auch $\mathfrak{N}p \equiv 1 \pmod{l}$. Wegen $\mathfrak{N}p = p^{l^v}$ ist daher auch $p \equiv 1 \pmod{l}$. Nehme ich Λ als den Teilkörper l-ten Grades des Körpers der p-ten Einheitswurzeln, so ist Λ nicht in K'_v enthalten, da ja sonst Λ in $\Sigma(\mathsf{K}'_v) = \Sigma(\mathsf{K}_{v-1})$ läge, also p in K_{v-1} verzweigt wäre. p ist in genau einem der zwischen K_{v-1} und $\Lambda\mathsf{K}'_v$ liegenden, von $\Lambda\mathsf{K}_{v-1}$ und K'_v verschiedenen Körpern unverzweigt, wie sofort aus der Betrachtung der zu p gehörigen Trägheitsgruppe für $\Lambda\mathsf{K}'_v/\mathsf{K}_{v-1}$ folgt. Ich kann daher von vornherein annehmen, daß dieser Fall nicht vorliegt, d. h. daß die Diskriminanten-

[6]) Man erhält so auch wirklich jeden Normalkörper, der K_{v-1} umfaßt und dessen Galoisgruppe aus der von K_{v-1} mit Hilfe des gegebenen Faktorensystems gewonnen wird, doch wird das hier nicht gebraucht. Man kann es etwa beweisen, indem man *alle* Lösungen ξ_u, μ, β der Gleichungen (1), (5)—(8) in Zusammenhang mit *einer* Lösung bringt, da diese Gleichungen gleichbedeutend mit den Relationen zwischen $\overline{H}$, $\overline{G}_u$, $\overline{T}$ sind.

[7]) Vgl. [1]).

teiler $\neq l$ von K'_ν mit denen von $\mathsf{K}_{\nu-1}$ übereinstimmen. Sie sind also dann alle $\equiv 1 \pmod{l^n}$, aber es kann eintreten, daß sie nicht alle in K'_ν fleißig sind. Es seien $p_1, \ldots, p_h$ mit $h < k$ (sonst ist ja nichts mehr zu zeigen) die fleißigen Diskriminantenteiler $\neq l$ von K'_ν. Der Körper $\mathsf{K}'_\nu\left(e^{\frac{2\pi i}{l^n}}, \sqrt[l]{p_1}, \ldots, \sqrt[l]{p_h}, \sqrt[l]{p_k}\right)$ ist eine echte Erweiterung von $\mathsf{K}'_\nu\left(e^{\frac{2\pi i}{l^n}}, \sqrt[l]{p_1}, \ldots, \sqrt[l]{p_h}\right)$. Wäre das nicht der Fall, so wäre $\sqrt[l]{P}$ in $\mathsf{K}'_\nu\left(e^{\frac{2\pi i}{l^n}}\right)$ enthalten, wobei P ein Potenzprodukt der $p_1, \ldots, p_h, p_k$ ist, das keine l-te Potenz in P ist. Das kann aber nicht sein, da jeder Automorphismus von $\mathsf{K}'_\nu\left(e^{\frac{2\pi i}{l^n}}\right)$, der K'_ν elementweise ungeändert läßt und nur einen Automorphismus $\neq 1$ von $\mathsf{P}\left(e^{\frac{2\pi i}{l^n}}\right)$ bewirkt, im Zentrum der Galoisgruppe von $\mathsf{K}'_\nu\left(e^{\frac{2\pi i}{l^n}}\right)$ liegt, und somit jeder Automorphismus von $\overline{\mathsf{P}}\left(\sqrt[l]{P}\right)$, der $\mathsf{P}\left(\sqrt[l]{P}\right)$ elementweise ungeändert läßt und nur einen Automorphismus $\neq 1$ von $\overline{\mathsf{P}}$ bewirkt, im Zentrum der Galoisgruppe von $\overline{\mathsf{P}}\left(\sqrt[l]{P}\right)$ liegen müßte, was aber für $l \neq 2$ nicht der Fall ist. Es gibt daher nach dem allgemeinen Satz von der arithmetischen Progression eine Primzahl p, die in $\mathsf{K}'_\nu\left(e^{\frac{2\pi i}{l^n}}, \sqrt[l]{p_1}, \ldots, \sqrt[l]{p_h}\right)$ voll zerfällt, für die aber bei weiterer Adjunktion von $\sqrt[l]{p_k}$ Trägheit eintritt und die nicht in der Diskriminante von $\Sigma(\mathsf{K}'_\nu)$ aufgeht. Λ nehme ich dann als den Teilkörper l-ten Grades des Körpers der p-ten Einheitwurzeln. Dann ist $\Lambda \cap \mathsf{K}'_\nu = \mathsf{P}$, da p nicht in der Diskriminante von $\Sigma(\mathsf{K}'_\nu)$ aufgeht. In $\Lambda\mathsf{K}'_\nu$ sind $p_1, \ldots, p_h$ fleißig, da sie nach demselben Schluß wie am Anfang des Beweises des Einbettungssatzes in Λ voll zerfallen. Dagegen bleibt p_k nach demselben Schluß in Λ träge, ist also in $\Lambda\mathsf{K}_{\nu-1}$ nicht fleißig. Da p_k in $\mathsf{K}_{\nu-1}$ fleißig ist, ist p_k nach der Theorie der Zerlegungsgruppe für $\Lambda\mathsf{K}'_\nu/\mathsf{K}_{\nu-1}$ in einem der von $\Lambda\mathsf{K}_{\nu-1}$ und K'_ν verschiedenen Körper zwischen $\mathsf{K}_{\nu-1}$ und $\Lambda\mathsf{K}'_\nu$ fleißig. Dieser Körper hat also weniger träge Diskriminantenteiler als K'_ν, da der neu hinzugekommene Diskriminantenteiler p fleißig ist. Da überdies $p \equiv 1 \pmod{l^n}$ ist, komme ich nach endlich vielen solchen Schritten zu einem Körper K_ν, der allen im Einbettungssatz stehenden Forderungen genügt, und damit ist dieser Satz auch in dem Fall bewiesen, daß $\mathfrak{H}_\nu$ kein direkter Faktor von $\mathfrak{G}_\nu$ ist.

Es sei zum Schluß noch bemerkt, daß damit nach gruppentheoretischen Ergebnissen von A. Scholz [8]) auch die Existenz von Normalkörpern mit beliebiger zweistufig metabelscher Galoisgruppe ungerader Ordnung über jedem algebraischen Zahlkörper endlichen Grades nachgewiesen ist.

---

[8]) A. Scholz, Reduktion der Konstruktion von Körpern mit zweistufiger (metabelscher) Gruppe, Sitz.ber. der Heidelberger Ak. d. W., Math.-Nat. Kl., 1929.

Eingegangen 9. Juli 1936.

Abhängigkeit der L-Funktionen in gewissen algebraischen Zahlkörpern.

Von *Zyoiti Suetuna* in Tokyo.

Es sei k ein algebraischer Zahlkörper und K eine galoissche Erweiterung von k, die über dem rationalen Zahlkörper R auch galoissch sein soll. Für einen einfachen Charakter χ_j der galoisschen Gruppe $\mathfrak{H}$ von K/k sei $L(s, \chi_j) = L(s, \chi_j; K/k)$ die Artinsche L-Funktion in k in bezug auf K. Wenn k schon der rationale Zahlkörper ist, dann gibt es zwischen diesen L-Funktionen keine multiplikative Relation, wie Herr Artin schon früher gezeigt hat [1]). Ist nun k über R galoissch, so ist für zwei einfache Charaktere χ, χ' von $\mathfrak{H}$ dann und nur dann $L(s, \chi) = L(s, \chi')$, wenn χ' zu χ in bezug auf die galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von K/R konjugiert ist. Außer dieser Art von Identitäten gibt es dann keine Abhängigkeiten zwischen den $L(s, \chi_j)$. Falls aber k nicht galoissch ist, so weiß man über die Abhängigkeiten der L-Funktionen heute noch beinahe nichts, selbst wenn man sich auf gewöhnliche L-Funktionen mit abelschen Charakteren beschränkt.

Nun ist im allgemeinen

$$L(s, \chi_j) = L(s, \Xi_{\chi_j};\ K/R),$$

wobei Ξ_{χ_j} den von χ_j induzierten Charakter von $\mathfrak{G}$ bedeutet. Setzt man daher

$$\Xi_{\chi_j}(\sigma) = \sum_i r_{ij}\, \Xi_i(\sigma) \text{ in } \mathfrak{G}, \tag{1}$$

wobei Ξ_i die einfachen Charaktere von $\mathfrak{G}$ durchläuft, so ist eine multiplikative Relation zwischen den $L(s, \chi_j)$ eine lineare Abhängigkeit der Spalten der Matrix

$$(r_{ij})$$

und umgekehrt. Diese Matrix ergibt sich auch daraus, daß man die Charaktere von $\mathfrak{G}$ in die einfachen Bestandteile in $\mathfrak{H}$ zerlegt. In der Tat gilt bekanntlich als Seitenstück zu (1)

$$\Xi_i(\sigma) = \sum_j r_{ij}\, \chi_j(\sigma) \quad \text{in } \mathfrak{H}.$$

In einer früheren Arbeit [2]) betrachtete ich den Fall, daß k ein Körper p-ten Grades ist, wobei p eine solche ungerade Primzahl bedeutet, daß $p - 1$ quadratfrei ist, und daß

[1]) E. Artin, Über eine neue Art von L-Reihen, Hamburger Abh. **3** (1924), 89—108, § 4. Vgl. hierzu E. Artin, Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren, ebenda **8** (1930), 292—306, und auch H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht d. D. M. V., Erg.Bd. **6** (1930).

[2]) Z. Suetuna, Über die L-Funktionen in gewissen algebraischen Zahlkörpern, Japanese Journal of Math. **13** (1936), 27—38. Vgl. auch Z. Suetuna, Zerlegung der Charaktere einer Gruppe in die ihres Normalteilers, ebenda **12** (1935), 95—98.

die Gruppe des zu k gehörigen galoisschen Körpers die volle lineare Gruppe mod p ist. In diesem speziellen Fall läßt sich die Zerlegung der Charaktere von $\mathfrak{G}$ in die von $\mathfrak{H}$ vollständig durchführen, und dadurch werden die Abhängigkeiten zwischen den $L(s, \chi_j)$ bestimmt. Wenn aber $p-1$ nicht quadratfrei ist, dann ist die Zerlegung der Charaktere von $\mathfrak{G}$ so schwierig, daß sich daraus die Gestalt der Matrix (r_{ij}) nicht ergibt. Trotzdem kann man auch in diesem Fall mittels der besonderen Eigenschaften der linearen Gruppe alle Arten von Abhängigkeiten zwischen den $L(s, \chi_j)$ angeben.

Im folgenden sei also k ein Körper p-ten Grades, wobei p eine ungerade Primzahl bedeutet, und die Gruppe des zu k gehörigen galoisschen Körpers sei eine lineare Gruppe mod p.

Aus den früheren Arbeiten setze ich nur die folgende Tatsache als bekannt voraus: Es sei $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe und $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler darin vom Index k mit abelscher Faktorgruppe. Ferner sei χ ein einfacher Charakter von $\mathfrak{G}$ und die Gruppe $\mathfrak{H}_0$ zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ die zu χ gehörige Gruppe, d. h. die Gruppe, die von allen denjenigen Nebengruppen von $\mathfrak{H}$ erzeugt wird, in denen es mindestens ein Element σ mit $\chi(\sigma) \neq 0$ gibt. Dann gibt es zwischen $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{G}$ eine Gruppe $\mathfrak{H}^*$, wobei der Index $l = (\mathfrak{G} : \mathfrak{H}^*)$ durch den Index $m = (\mathfrak{H}^* : \mathfrak{H}_0)$ teilbar ist, so daß χ in lauter verschiedene, einfache Charaktere von $\mathfrak{H}^*$ zerfällt:

$$\chi(\sigma) = \chi_{\psi^*}(\sigma) \text{ in } \mathfrak{G},$$

und alle zu ψ^* konjugierten in $\mathfrak{H}$ nicht weiter zerfallen. Unter den l zu ψ^* konjugierten werden dabei je m Charaktere in $\mathfrak{H}_0$ gleich:

$$\chi(\sigma) = m(\psi_0(\sigma) + \psi_0(\tau_2\sigma\tau_2^{-1}) + \cdots + \psi_0(\tau_n\sigma\tau_n^{-1})), \qquad l = mn,$$

und die n zu ψ_0 konjugierten Charaktere sind auch in $\mathfrak{H}$ voneinander verschieden:

$$\chi(\sigma) = m(\psi(\sigma) + \psi(\tau_2\sigma\tau_2^{-1}) + \cdots + \psi(\tau_n\sigma\tau_n^{-1})).$$

Wenn unter den abelschen Charakteren $\hat{\chi}_i(\sigma)$ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, $1 \leqq i \leqq k$, die t Charaktere mit $i \leqq t$, wobei t den Index $(\mathfrak{H}_0 : \mathfrak{H})$ bedeutet, in $\mathfrak{H}_0$ voneinander verschieden sind, so gibt es außer den Charakteren

$$\chi(\sigma)\,\hat{\chi}_i(\sigma), \qquad 1 \leqq i \leqq t,$$

keinen anderen einfachen Charakter von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{H}$ in eine Summe von zu ψ konjugierten zerfällt.

§ 1.

Nun sei k' der zu k gehörige galoissche Körper und h der Grad von k' über k. Ist $\mathfrak{H}'$ die zu k' gehörige Gruppe, so ist also nach unserer Voraussetzung die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}'$ eine lineare Gruppe mod p. Demgemäß denken wir uns

$$\mathfrak{H}'\tau = (z, z+1), \quad \mathfrak{H}'\varrho = (z, w^q z),$$

wobei w eine primitive Wurzel mod p und

$$q = \frac{p-1}{h}$$

ist. Alsdann ist

$$(2) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}\tau + \cdots + \mathfrak{H}\tau^{p-1}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}'\varrho + \cdots + \mathfrak{H}'\varrho^{h-1}.$$

Für den von einem einfachen Charakter χ von $\mathfrak{H}$ induzierten Charakter Ξ_χ von $\mathfrak{G}$ gilt bekanntlich

$$\Xi_\chi(\sigma) = \sum_j{}' \chi(\tau^j\sigma\tau^{-j}), \quad \tau^j\sigma\tau^{-j} < \mathfrak{H}.$$

Damit aber für eine Nebengruppe $\mathfrak{H}'\varrho^{\mu}\tau^{\nu}$ von $\mathfrak{H}'$

$$\tau^{j}(\mathfrak{H}'\varrho^{\mu}\tau^{\nu})\,\tau^{-j} < \mathfrak{H}$$

sei, ist notwendig und hinreichend, daß

$$(w^{q\mu}-1)\,j+\nu \equiv 0 \pmod{p} \tag{3}$$

ist. Daher haben wir

$$\Xi_{\chi}(\sigma)=\begin{cases}\sum_{j=0}^{p-1}\chi(\tau^{j}\sigma\tau^{-j}) & \text{für} \quad \sigma<\mathfrak{H}',\\ \chi(\tau^{j}\sigma\tau^{-j}) & \text{für} \quad \sigma<\mathfrak{H}'\varrho^{\mu}\tau^{\nu} \qquad (1\leqq\mu\leqq h-1),\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases} \tag{4}$$

wobei j in der zweiten Gleichung der Bedingung (3) genügen soll.

Nunmehr sei $\chi(\sigma)$ ein einfacher Charakter von $\mathfrak{H}$, der in $\mathfrak{H}'$ folgendermaßen zerfällt:

$$\chi(\sigma)=m(\psi(\sigma)+\psi(\varrho\sigma\varrho^{-1})+\cdots+\psi(\varrho^{n-1}\sigma\varrho^{-n+1})),$$

und unter den zu $\psi(\sigma)$ in bezug auf $\mathfrak{G}$ konjugierten seien nur die in $\chi(\sigma)$ vorkommenden Charaktere voneinander verschieden. Alsdann muß

$$\psi(\sigma)=\psi(\tau\sigma\tau^{-1}) \tag{5}$$

sein. Denn sonst würden die p Charaktere

$$\psi(\tau^{j}\sigma\tau^{-j}), \quad 0\leqq j\leqq p-1,$$

voneinander verschieden sein, was natürlich ein Widerspruch ist. Es gibt nun in der Tat nur n verschiedene Charaktere, wobei n ein Teiler von $p-1$ ist.

Andererseits ist dann und nur dann $\mathfrak{H}'\tau^{\nu}\varrho^{\mu}=\mathfrak{H}'\varrho^{\mu'}\tau^{\nu'}$, wenn

$$\mu'\equiv\mu \pmod{h}, \quad \nu'\equiv\nu w^{q\mu} \pmod{p}. \tag{6}$$

Folglich ist nach (5)

$$\psi(\varrho^{i}\tau^{j}\sigma\tau^{-j}\varrho^{-i})=\psi(\varrho^{i}\sigma\varrho^{-i}). \tag{7}$$

Wird

$$e=m^{2}n, \quad f=\frac{h}{e}$$

gesetzt, so gibt es dann f Charaktere von $\mathfrak{H}$, die in $\mathfrak{H}'$ in eine Summe von zu $\psi(\sigma)$ konjugierten zerfallen, nämlich

$$\chi^{(i)}(\sigma)=\chi(\sigma)\hat{\chi}^{i}(\sigma), \quad 0\leqq i\leqq f-1,$$

wobei $\hat{\chi}(\sigma)$ einen erzeugenden Charakter von $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}'$ bedeutet. Nun sei angenommen, daß zwischen den induzierten Charakteren $\Xi_{\chi^{(i)}}(\sigma)$, $0\leqq i\leqq f-1$, eine lineare Relation

$$\sum_{i=0}^{f-1}c_{i}\,\Xi_{\chi^{(i)}}(\sigma)=0 \tag{8}$$

besteht. Nach (4) und (7) ist alsdann für ein Element σ aus $\mathfrak{H}'$

$$\begin{aligned}\Xi_{\chi^{(i)}}(\sigma)&=\sum_{j=0}^{p-1}m\sum_{i=0}^{n-1}\psi(\varrho^{i}\tau^{j}\sigma\tau^{-j}\varrho^{-i})\\&=pm\sum_{i=1}^{n-1}\psi(\varrho^{i}\sigma\varrho^{-i})=p\,\chi^{(i)}(\sigma).\end{aligned}$$

Aus (8) folgt somit

$$\sum_{i=0}^{f-1}c_{i}\,\chi^{(i)}(\sigma)=0 \text{ in } \mathfrak{H}'.$$

Ist aber σ ein Element aus $\mathfrak{H}'\varrho^{\mu}\tau^{\nu}$ $(1 \leqq \mu \leqq h-1)$, sc ist nach (4)

$$\sum_{i=0}^{f-1} c_i \Xi_{\chi^{(i)}}(\sigma) = \sum_{i=0}^{f-1} c_i \chi^{(i)}(\sigma^*) = 0,$$

wobei $\sigma^* = \tau^j \sigma \tau^{-j}$ sicherlich alle Elemente aus $\mathfrak{H}'\varrho^{\mu}$ durchläuft, wenn σ alle Elemente aus $\mathfrak{H}'\varrho^{\mu}\tau^{\nu}$ durchläuft. Für alle Elemente σ aus $\mathfrak{H}$ ist daher

$$\sum_{i=0}^{f-1} c_i \chi^{(i)}(\sigma) = 0,$$

d. h. $c_0 = c_1 = \cdots = c_{f-1} = 0$. Folglich gilt der folgende

Satz 1. *Für einen einfachen Charakter ψ von $\mathfrak{H}'$ sei $\psi(\sigma) = \psi(\tau\sigma\tau^{-1})$, und*

$$\chi(\sigma)\,\hat{\chi}^i(\sigma), \quad 0 \leqq i \leqq f-1,$$

seien die einfachen Charaktere von $\mathfrak{H}$, die ψ in sich enthalten. Dann gibt es keine multiplikative Relation zwischen den L-Funktionen

$$L(s, \chi\hat{\chi}^i), \quad 0 \leqq i \leqq f-1.$$

§ 2.

Die zu einem einfachen Charakter $\Xi(\sigma)$ von $\mathfrak{G}$ gehörige Gruppe sei die Gruppe, die von allen denjenigen Nebengruppen von $\mathfrak{H}'$ erzeugt wird, in denen es mindestens ein Element σ mit $\Xi(\sigma) \neq 0$ gibt. Diese Gruppe, die jetzt mit $\mathfrak{G}_{\Xi}$ bezeichnet werden soll, ist ersichtlich ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Als $\mathfrak{G}_{\Xi}$ kommen also nur folgende Gruppen in Betracht: $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{H}^0 = \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}'\tau + \cdots + \mathfrak{H}'\tau^{p-1}$ (vgl. (2)) und

$$\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H}^0 + \mathfrak{H}^0\varrho^e + \cdots + \mathfrak{H}^0\varrho^{e(f-1)}, \quad ef = h. \tag{9}$$

1) $\mathfrak{G}_{\Xi} = \mathfrak{G}$ und $\Xi(\sigma) \neq 0$ für ein σ aus einer Nebengruppe $\mathfrak{H}'\tau^j$ $(1 \leqq j \leqq p-1)$. In diesem Fall zerfällt Ξ in $\mathfrak{H}^0$ nicht: $\Xi(\sigma) = \chi^0(\sigma)$ in $\mathfrak{H}^0$; und dieser einfache Charakter χ^0 von $\mathfrak{H}^0$ zerfällt in $\mathfrak{H}'$ auch nicht: $\chi^0(\sigma) = \psi(\sigma)$ in $\mathfrak{H}'$. Also gilt (5) für diesen Charakter ψ von $\mathfrak{H}'$.

2) $\mathfrak{G}_{\Xi} = \mathfrak{G}$ und $\Xi(\sigma) = 0$ für alle σ aus allen $\mathfrak{H}'\tau^j$ $(1 \leqq j \leqq p-1)$. Ξ zerfällt in $\mathfrak{H}^0$ in diesem Fall wieder nicht: $\Xi(\sigma) = \chi^0(\sigma)$ in $\mathfrak{H}^0$. Aber χ^0 zerfällt in $\mathfrak{H}'$ in lauter verschiedene, einfache Charaktere:

$$\chi^0(\sigma) = \psi(\sigma) + \psi(\tau\sigma\tau^{-1}) + \cdots + \psi(\tau^{p-1}\sigma\tau^{-p+1}).$$

Für ein ν $(0 \leqq \nu \leqq p-1)$ gilt also $\psi(\varrho\sigma\varrho^{-1}) = \psi(\tau^{\nu}\sigma\tau^{-\nu})$. Wird

$$\nu' \equiv -\frac{\nu}{w^q - 1} \pmod{p}$$

gesetzt, so ist folglich

$$\psi(\tau^{\nu'}\sigma\tau^{-\nu'}) = \psi(\tau^{\nu'}\varrho\sigma\varrho^{-1}\tau^{-\nu'}),$$

wie sich sofort nach (6) bestätigen läßt. Deshalb denken wir uns

$$\psi(\sigma) = \psi(\varrho\sigma\varrho^{-1}). \tag{10}$$

Aus (10) ergibt sich, daß für jedes j $(1 \leqq j \leqq p-1)$ die h Charaktere

$$\psi(\tau^j\varrho^i\sigma\varrho^{-i}\tau^{-j}), \quad 0 \leqq i \leqq h-1,$$

alle voneinander verschieden sind, wie sich leicht auch nach (6) beweisen läßt. Setzt man also

$$\chi^{(\lambda)}(\sigma) = \chi_{\psi^{(\lambda)}}(\sigma) \text{ mit } \psi^{(\lambda)}(\sigma) = \psi(\tau^{w^{\lambda-1}}\sigma\tau^{-w^{\lambda-1}}), \tag{11}$$

so sind die q Charaktere $\chi^{(\lambda)}(\sigma)$ von $\mathfrak{H}$ mit $\lambda \leqq q$ alle voneinander verschieden. Somit ist

$$\Xi(\sigma) = \chi(\sigma) + \chi^{(1)}(\sigma) + \cdots + \chi^{(q)}(\sigma) \text{ in } \mathfrak{H} \tag{12}$$

und $\chi(\sigma) = \psi(\sigma)$ in $\mathfrak{H}'$, wobei ψ der Bedingung (10) genügen soll und die Charaktere $\chi^{(\lambda)}$ für alle Elemente von $\mathfrak{H}$ außerhalb $\mathfrak{H}'$ gleich 0 sind.

Andererseits sei $\hat{\Xi}$ bzw. $\hat{\chi}$ ein erzeugender Charakter von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}^0$ bzw. $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}'$ mit der Bedingung

$$\hat{\Xi}(\sigma) = \hat{\chi}(\sigma) \quad \text{für } \sigma \text{ aus } \mathfrak{H}'\varrho. \tag{13}$$

Um dann die Abhängigkeiten zu bestimmen, kommen im vorliegenden Falle nach (12) nur die folgenden Charaktere in Betracht:

$$\Xi(\sigma)\,\hat{\Xi}^i(\sigma) = \chi(\sigma)\hat{\chi}^i(\sigma) + \chi^{(1)}(\sigma) + \cdots + \chi^{(q)}(\sigma), \quad 0 \leqq i \leqq h-1. \tag{14}$$

3) $\mathfrak{G}_\Xi = \mathfrak{H}'$. In $\mathfrak{H}'$ zerfällt Ξ natürlich auf folgende Weise:

$$\Xi(\sigma) = m(\psi(\sigma) + \cdots),$$

wobei auf der rechten Seite s voneinander verschiedene Charaktere vorkommen sollen. Wegen

$$\sum_{\sigma \prec \mathfrak{G}} \Xi(\sigma)\,\Xi(\sigma^{-1}) = \sum_{\sigma \prec \mathfrak{H}'} \Xi(\sigma)\,\Xi(\sigma^{-1})$$

ist dann $ph = m^2 s$. Folglich geht m^2 in h auf. Also sei

$$h = m^2 n, \quad s = pn$$

gesetzt. Alsdann ist in $\mathfrak{H}'$

$$\Xi(\sigma) = m \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{p-1} \psi(\varrho^i \tau^j \sigma \tau^{-j} \varrho^{-i}) = m \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{p-1} \psi(\tau^j \varrho^i \sigma \varrho^{-i} \tau^{-j}). \tag{15}$$

Weil auch der Charakter $\psi(\varrho^n \sigma \varrho^{-n})$ in $\Xi(\sigma)$ vorkommen muß, so gibt es ein ν derart, daß in $\mathfrak{H}'$ $\psi(\varrho^n \sigma \varrho^{-n}) = \psi(\tau^\nu \sigma \tau^{-\nu})$ ist. Dann ist

$$\psi(\tau^{\nu'} \sigma \tau^{-\nu'}) = \psi(\tau^{\nu'} \varrho^n \sigma \varrho^{-n} \tau^{-\nu'})$$

mit

$$\nu' \equiv -\frac{\nu}{w^{qn} - 1} \pmod{p}.$$

Daher denken wir uns

$$\psi(\sigma) = \psi(\varrho^n \sigma \varrho^{-n}). \tag{16}$$

Ein einfacher Charakter χ von $\mathfrak{H}$, der den Charakter ψ von (16) enthält, zerfällt in $\mathfrak{H}'$ folgendermaßen:

$$\chi(\sigma) = m^*(\psi(\sigma) + \psi(\varrho\sigma\varrho^{-1}) + \cdots + \psi(\varrho^{n-1}\sigma\varrho^{-n+1})),$$

wobei $m^{*2}n$ in h aufgeht, d. h. m^* ein Teiler von m ist. Ist nun χ in Ξ etwa a-mal enthalten, so ist wegen

$$\sum_{\sigma \prec \mathfrak{H}} \Xi(\sigma)\,\chi(\sigma^{-1}) = \sum_{\sigma \prec \mathfrak{H}'} \Xi(\sigma)\,\chi(\sigma^{-1})$$

$ah = mm^*n$, d. h. $am = m^*$; folglich ist $a = 1$, $m^* = m$, also

$$\chi(\sigma) = m(\psi(\sigma) + \psi(\varrho\sigma\varrho^{-1}) + \cdots + \psi(\varrho^{n-1}\sigma\varrho^{-n+1})). \tag{17}$$

Andererseits sind für jedes j $(1 \leqq j \leqq p-1)$ die n Charaktere

$$\psi(\tau^j \varrho^i \sigma \varrho^{-i} \tau^{-j}), \quad 0 \leqq i \leqq n-1,$$

alle voneinander verschieden, wie sich sofort nachweisen läßt (vgl. Fall 2)). Definieren wir daher $\chi^{(\lambda)}(\sigma)$ genau so wie bei (11), so sind die einfachen Charaktere von $\mathfrak{H}$

$$\chi^{(\lambda)}(\sigma), \quad 1 \leqq \lambda \leqq qn,$$

wieder voneinander verschieden. Nach (15) und (17) haben wir dann

$$\Xi(\sigma) = \chi(\sigma) + m(\chi^{(1)}(\sigma) + \cdots + \chi^{(qn)}(\sigma)), \tag{18}$$

und dies Ξ ist der einzige Charakter von $\mathfrak{G}$, der unser ψ in sich enthält.

§ 3.

Nunmehr sei $\mathfrak{G}_\Xi = \mathfrak{H}^*$, wobei $\mathfrak{H}^*$ die Gruppe (9) bedeutet ($1 \leqq f < h$). Wenn man den Charakter Ξ in $\mathfrak{H}$ betrachtet, so ist die zugehörige Gruppe ersichtlich die folgende:

$$\mathfrak{H}_* = \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}'\varrho^e + \cdots + \mathfrak{H}'\varrho^{e(f-1)}. \tag{19}$$

In $\mathfrak{H}^0$ zerfällt Ξ folgendermaßen:

$$\Xi(\sigma) = m(\chi^0(\sigma) + \chi^0(\varrho\sigma\varrho^{-1}) + \cdots + \chi^0(\varrho^{n-1}\sigma\varrho^{-n+1})), \quad m^2 n = e.$$

4) $\mathfrak{G}_\Xi = \mathfrak{H}^*$ und χ^0 zerfalle in $\mathfrak{H}'$ nicht; es sei also $\chi^0(\sigma) = \psi(\sigma)$ in $\mathfrak{H}'$. Wenn nun unter den Charakteren

$$\psi(\varrho^i\sigma\varrho^{-i}), \qquad 0 \leqq i \leqq n-1,$$

genau die n' Charaktere mit $i < n'$ voneinander verschieden sind [3]), so hat Ξ in $\mathfrak{H}'$ folgende Gestalt:

$$\Xi(\sigma) = m'(\psi(\sigma) + \psi(\varrho\sigma\varrho^{-1}) + \cdots + \psi(\varrho^{n'-1}\sigma\varrho^{-n'+1})).$$

Somit gilt (5) für diesen Charakter ψ von $\mathfrak{H}'$.

5) $\mathfrak{G}_\Xi = \mathfrak{H}^*$ und χ^0 zerfalle in $\mathfrak{H}'$ in lauter verschiedene einfache Charaktere; es sei also

$$\chi^0(\sigma) = \psi(\sigma) + \psi(\tau\sigma\tau^{-1}) + \cdots + \psi(\tau^{p-1}\sigma\tau^{-p+1}) \text{ in } \mathfrak{H}'.$$

Alsdann ist in $\mathfrak{H}'$ $(0 \leqq i \leqq n-1)$

$$\chi^0(\varrho^i\sigma\varrho^{-i}) = \sum_{j=0}^{p-1} \psi(\tau^j\varrho^i\sigma\varrho^{-i}\tau^{-j}) = \sum_{j=0}^{p-1} \psi(\varrho^i\tau^j\sigma\tau^{-j}\varrho^{-i})$$

(vgl. (6)), was den von $\psi(\varrho^i\sigma\varrho^{-i})$ induzierten Charakter von $\mathfrak{H}^0$ bedeutet. Weil die $\chi^0(\varrho^i\sigma\varrho^{-i})$, $0 \leqq i \leqq n-1$, voneinander verschieden sind, so müssen die pn Charaktere

$$\psi(\varrho^i\tau^j\sigma\tau^{-j}\varrho^{-i})$$

von $\mathfrak{H}'$ alle voneinander verschieden sein, so daß wir haben:

$$\Xi(\sigma) = m\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{p-1} \psi(\varrho^i\tau^j\sigma\tau^{-j}\varrho^{-i}) \text{ in } \mathfrak{H}'.$$

Genau so wie im Fall 3) ist nun bei passender Wahl $\psi(\sigma) = \psi(\varrho^n\sigma\varrho^{-n})$ (vgl. (16)), und ein dies ψ enthaltender Charakter χ von $\mathfrak{H}$ hat wegen

$$\sum_{\sigma<\mathfrak{H}} \Xi(\sigma)\chi(\sigma^{-1}) = \sum_{\sigma<\mathfrak{H}_*} \Xi(\sigma)\chi(\sigma^{-1})$$

(vgl. (19)) folgende Gestalt:

$$\chi(\sigma) = m(\psi(\sigma) + \psi(\varrho\sigma\varrho^{-1}) + \cdots + \psi(\varrho^{n-1}\sigma\varrho^{-n+1})).$$

Ferner sind die Charaktere

$$\chi^{(\lambda)}(\sigma) = \chi_{\psi^{(\lambda)}}(\sigma) \text{ mit } \psi^{(\lambda)}(\sigma) = \psi(\tau^{w^{\lambda-1}}\sigma\tau^{-w^{\lambda-1}}), \quad 1 \leqq \lambda \leqq qn,$$

voneinander verschieden, und wir haben

$$\Xi(\sigma) = \chi(\sigma) + m(\chi^{(1)}(\sigma) + \cdots + \chi^{(qn)}(\sigma)).$$

---

[3]) Im Fall 4) der ersten Arbeit, l. c. [2]), 35—36, wurde der Fall, daß nur gewisse der zu ψ konjugierten voneinander verschieden sind, versehentlich übersehen. Aber auch dann läßt sich die Zerlegung von Ξ leicht durchführen.

Um also die Abhängigkeiten zu bestimmen, kommen hierbei nur die folgenden Charaktere in Betracht:

$$(20)\quad \Xi(\sigma)\,\hat{\Xi}^i(\sigma) = \chi(\sigma)\,\hat{\chi}^i(\sigma) + m(\chi^{(1)}(\sigma) + \cdots + \chi^{(qn)}(\sigma)), \quad 0 \leqq i \leqq f-1,$$

wobei Ξ und $\hat{\chi}$ erzeugende Charaktere von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}^0$ bzw. $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}'$ mit der Bedingung (13) bedeuten.

Nach (14), (18), (20) und Satz 1 gilt also der folgende

Satz 2. *Unter den zu einem einfachen Charakter ψ von $\mathfrak{H}'$ konjugierten seien genau die folgenden*

$$\psi(\varrho^i\tau^j\sigma\tau^{-j}\varrho^{-i}), \quad 0 \leqq i \leqq n-1, \quad 0 \leqq j \leqq p-1,$$

voneinander verschieden; dabei soll $\psi(\sigma) = \psi(\varrho^n\sigma\varrho^{-n})$ sein. Alsdann sei χ ein dies ψ enthaltender Charakter von $\mathfrak{H}$:

$$\chi(\sigma) = m(\psi(\sigma) + \psi(\varrho\sigma\varrho^{-1}) + \cdots + \psi(\varrho^{n-1}\sigma\varrho^{-n+1})), \quad m^2n = e;$$

ferner sei

$$\chi^{(\lambda)}(\sigma) = \chi_{\psi^{(\lambda)}}(\sigma) \quad mit \quad \psi^{(\lambda)}(\sigma) = \psi(\tau^{w^{\lambda-1}}\sigma\tau^{-w^{\lambda-1}}), \quad 1 \leqq \lambda \leqq qn.$$

Dann haben wir

$$L(s, \chi^{(1)}) = \cdots = L(s, \chi^{(qn)})$$

und

$$L(s, \chi^{(1)}) = \Big(\prod_{i=0}^{f-1} L(s, \chi\hat{\chi}^i)\Big)^m, \qquad f = \frac{h}{e}.$$

Andere Arten von Abhängigkeiten zwischen den L-Funktionen in unserem k gibt es nicht.

Im Fall 1) und Fall 4) gilt (5). Im Fall 2) ist $f = h$, $m = n = 1$. Wenn in diesem Fall $q = 1$, d. h. $h = p - 1$ ist, so gibt es hierbei keine Identität zweier L-Funktionen. Im Fall 3) ist $f = 1$, $e = h$. Fall 5) unterscheidet sich vom Fall 3) nur dadurch, daß $f > 1$ ist.

Wenn k ein biquadratischer Körper und die Gruppe des zu k gehörigen galoisschen Körpers die Tetraedergruppe ist, so kann man auf dieselbe Weise alle Arten von Abhängigkeiten zwischen den L-Funktionen in k vollständig angeben. Aber der Sachverhalt ist schon kompliziert, wenn k z. B. ein Körper 5-ten Grades und die zugehörige galoissche Gruppe die Ikosaedergruppe ist.

Tokyo, den 1. August 1936.

Eingegangen 19. August 1936.

Die gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung, die lineare homogene Form erhalten können. II*).

Von *Walter Neumer* in Worms.

Zweiter Abschnitt.
Ausdehnung der bisherigen Betrachtungen auf Berührungstransformationen.

§ 4. Allgemeine Formeln und Sätze, das Rechnen mit Berührungstrf.n betreffend.

1. Das Rechnen mit Berührungs-Trf.n (B.T.n) der Ebene wird erheblich vereinfacht, wenn man nach dem Vorgange von Gąsiorowski [25]) an Stelle der Operationen (Op.n) $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y'}$ die Op.n

$$\partial_1 f = f_1 = f_x + y' f_y, \quad \partial_2 f = f_2 = f_{y'}, \quad \partial_3 f = f_3 = f_y \tag{156}$$

verwendet. Wir wollen die wichtigsten Eigenschaften dieser Op.n kurz zusammenstellen. Zunächst gilt

$$\partial_3 f = (\partial_2 \partial_1) = f_{12} - f_{21} = f_3, \tag{157}$$

wenn $(f_i)_k = f_{ik}$ geschrieben wird. Die Op.n $f_{i_1 \ldots i_s}$ $(i_1, \ldots, i_s = 1, 2)$ heißen Op.n s-ter *Stufe*; wegen (157) müssen wir dann f_3 eine Op. 2. Stufe nennen. Weder die Op.n $f_{i_1 \ldots i_s}$ $(i_1, \ldots, i_s = 1, 2)$ von s-ter Stufe noch die Op.n $f_{j_1 \ldots j_q}$ $(j_1, \ldots, j_q = 1, 2, 3)$ derselben Stufe $\left(q + \sum_{k=1}^{q} (2^{j_k - 1} - j_k) = s\right)$ sind sämtlich unabhängig voneinander; denn man hat für $s = 3$ die Beziehungen

$$f_{13} = f_{31}, \quad f_{23} = f_{32} \tag{158}$$

oder wegen (157)

$$f_{112} + f_{211} = 2 f_{121}, \quad f_{221} + f_{122} = 2 f_{212}. \tag{159}$$

Es ist bemerkenswert, daß in (159) die Indizes 1, 2 gleichberechtigt erscheinen. Durch Ausübung der Op.n ∂_1, ∂_2 auf (159) sowie durch Einsetzen von f_1, f_2 an Stelle von f in (159) gelangt man zu den Relationen zwischen den Op.n 4. Stufe $f_{i_1 \ldots i_4}$ $(i_1, \ldots, i_4 = 1, 2)$.

---

*) Teil I erschien in diesem Journal **176** (1937), S. 224—249. Die Abschnitte, Paragraphen, Sätze, Formeln und Anmerkungen sind in beiden Teilen fortlaufend durchnumeriert.

[25]) L. Gąsiorowski, Über die Defgl.n der endlichen kontin. Gruppen von B. T.n in der Ebene, Dissertation Gießen = Prace matematyczno-fizyczne **26** (1914).

Analog steigt man von da aus auf zu den Relationen 5. Stufe usw., die indessen für eine bestimmte Stufe nicht sämtlich voneinander unabhängig sind [26]). Zu einer Bestimmung der Anzahl θ_s von unabhängigen Op.n s-ter Stufe $f_{i_1 \dots i_s}$ $(i_1, \dots, i_s = 1, 2)$ führt z. B. die folgende Überlegung. Zunächst liegt es auf der Hand, daß θ_s auch die Anzahl aller unabhängigen Op.n $f_{j_1 \dots j_q}$ $(j_1, \dots, j_q = 1, 2, 3)$ von s-ter Stufe überhaupt angibt. Denkt man sich alle möglichen Kombinationen mit Wiederholung der Ziffern 1, 2, 3 zur s-ten Stufe aufgeschrieben, so gehört zu jeder Kombination ein bestimmter Komplex von Variationen mit Wiederholung

$$(160) \qquad j_1, \dots, j_q \ (j_1, \dots, j_q = 1, 2, 3); \quad q + \sum_{k=1}^{q} (2^{j_k - 1} - j_k) = s.$$

Jeder Variation (160) entspricht eine Op. s-ter Stufe $f_{j_1 \dots j_q}$. Greifen wir aus jedem Komplex von Variationen (160) *eine* heraus, so können wir die entsprechenden Op.n $f_{j_1' \dots j_q'}$ als unabhängig ansehen und, wie eine einfache Betrachtung ergibt, aus diesen die sämtlichen Op.n s-ter Stufe $f_{j_1 \dots j_q}$ zusammensetzen, und zwar vermöge (157), (158). *Demnach ist die Zahl θ_s gleich der Anzahl aller Kombinationen mit Wiederholung der Ziffern* 1, 2, 3 *zur s-ten Stufe.*

Wie sich die Behandlung von partiellen Diffgl.n für Funktionen von x, y, y' bei Verwendung der Op.n ∂_1, ∂_2 gestaltet, darüber gibt das folgende Theorem Auskunft [27]).

Theorem 3. I. *Vorgelegt sei ein System von partiellen Diffgl.n für die Funktion f, geschrieben in den Op.n ∂_1, ∂_2*

$$(S) \qquad \Omega_{i)}\,(x, y, y'; f, f_1, f_2, f_{11}, \dots) = 0 \qquad (i = 1, \dots, m)\ ^{28}),$$

das die folgenden Eigenschaften besitzt: die höchste Stufe der in ihm auftretenden Op.n von f sei s. Aus den Relationen s-ter Stufe von (S) *und den Identitäten s-ter Stufe zwischen den Op.n $f_{i_1 \dots i_s}$ $(i_1, \dots, i_s = 1, 2)$ sollen sich sämtliche Op.n s-ter Stufe von f eindeutig durch x, y, y' und die Op.n* 0. *bis $(s-1)$-ter Stufe von f ausdrücken lassen, während das entsprechende für die Op.n $(s-1)$-ter Stufe nicht möglich ist. Ferner mögen sämtliche Relationen bis einschließlich s-ter Stufe, die sich aus* (S) *unmittelbar durch ein- oder mehrmalige Anwendung von ∂_1, ∂_2 ergeben, eine Folge von* (S) *und den Identitäten* 3. *bis s-ter Stufe zwischen den Op.n von f darstellen. Endlich sollen sich durch ein- und zweimalige Ausübung von ∂_1, ∂_2 auf die Relationen s-ter Stufe von* (S) *und nachfolgende Elimination vermöge* (S) *und der Identitäten* 3. *bis $(s+2)$-ter Stufe nur solche Relationen zwischen den Op.n* 0. *bis $(s-1)$-ter Stufe von f ergeben, welche bereits aus* (S) *folgen.*

Unter diesen Voraussetzungen hängt die allgemeinste Lösung von (S) *von endlich vielen willkürlichen Konstanten ab, nämlich von so vielen, wie Op.n von f vermöge* (S) *noch unabhängig bleiben. Das gleiche gilt für jedes System, das sich durch Anwendung der Op.n ∂_1, ∂_2 und Elimination in ein System* (S) *umformen läßt.*

II. *Hängt umgekehrt die Funktion f außer von x, y, y' noch von endlich vielen willkürlichen Konstanten ab, dann kann sie aufgefaßt werden als die allgemeinste Lösung eines Systems* (S) *von Diffgl.n der beschriebenen Art.*

III. *Die vorstehenden Aussagen lassen sich unmittelbar verallgemeinern auf ein simultanes System von Diffgl.n für mehrere Funktionen von x, y, y'.*

---

[26]) Darüber s. a. a. O. [25]).

[27]) A. a. O. [25]).

[28]) Die Schreibweise $\Omega_{i)}$ soll eine Verwechslung mit der Op. Ω_i ausschalten.

2. Eine B.T. der Ebene wird dargestellt durch Gleichungen der Form [29])

$$\mathfrak{x} = X(x, y, y'), \quad \mathfrak{y} = Y(x, y, y'), \quad \mathfrak{y}' = P(x, y, y'), \tag{161}$$

$$d\mathfrak{y} - \mathfrak{y}' d\mathfrak{x} = \Delta(x, y, y')\,(dy - y'dx) \quad (\Delta \neq 0). \tag{161'}$$

Wegen

$$df = f_1 dx + f_2 dy' + f_3 (dy - y'dx) \tag{162}$$

folgen daraus die Beziehungen

$$Y_1 = PX_1, \quad Y_2 = PX_2, \tag{163}$$

$$\Delta = P_2 X_1 - X_2 P_1. \tag{164}$$

Bilden wir die Relationen (159) für $f = Y$, so ergeben sich zwischen P, X die Beziehungen [30])

$$\begin{aligned} X_2 P_{11} + X_1 P_{12} + 2P_1 X_{21} &= P_2 X_{11} + P_1 X_{12} + 2X_1 P_{21} \\ X_1 P_{22} + X_2 P_{21} + 2P_2 X_{12} &= P_1 X_{22} + P_2 X_{21} + 2X_2 P_{12} \end{aligned}. \tag{165}$$

Diese Relationen besitzen die bemerkenswerte Eigenschaft, daß bei Vertauschung von X, P jede ihre rechte mit ihrer linken Seite vertauscht, während bei Vertauschung der Indizes 1, 2 *die beiden Relationen ineinander übergehen.* Nach Theorem 3 repräsentiert (165) die Int. Bed.n zu den beiden Diffgl.n (163) für Y, d. h. zwei den Beziehungen (165) genügende Funktionen X, P bestimmen ∞^1 B. T.n (161).

Eine *infinitesimale* B. T. der Ebene

$$Xf = \xi(x, y, y')\, p + \eta(x, y, y')\, q + \eta'(x, y, y')\, q' \tag{166}$$

ist bestimmt durch ihre *charakteristische Funktion* (ch. Fu.) $U(x, y, y')$ [31]) vermöge der Formeln

$$\xi = U_2, \quad \eta = y' U_2 - U, \quad \eta' = -U_1; \quad U = y'\xi' - \eta, \tag{166'}$$

$$Xf = U_2 f_1 - U_1 f_2 - U f_3. \tag{166''}$$

Die ch. Fu. U kann — ebenso wie das Symbol Xf der durch sie bestimmten inf. B. T. selber — noch mit einer beliebigen Konstanten multipliziert werden. Die ch. Fu. W der aus den inf. B. T.n Xf, Yf mit den ch. Fu.n U, V kombinierten inf. B. T. $Zf = (XY)$ ist gegeben durch [32])

$$W = \{UV\} = U_2 V_1 - V_2 U_1 - (UV_3 - VU_3). \tag{167}$$

Die Defgl.n einer endlichen oder unendlichen Gruppe von B. T.n sind nach einer Bemerkung zu Anfang von § 2, **1** vermöge (166') lineare homogene partielle Diffgl.n für die ch. Fu.n der inf. B. T.n der Gruppe. Numerieren wir die Op.n $f, f_1, f_2, f_{11}, \ldots$ nach irgendeinem Schema, aber in der Folge steigender Stufen:

$$f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots, \tag{168}$$

dann sehen die Defgl.n einer Gruppe von B. T.n der Ebene so aus

$$\alpha_{i1}(x, y, y')\, U^{(1)} + \cdots + \alpha_{im_i}(x, y, y')\, U^{(m_i)} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, q). \tag{169}$$

Vermöge (169) und der Identitäten zwischen den Op.n $f_{i_1 \ldots i_s}$ $(i_1, \ldots, i_s = 1, 2)$ mögen die endlich oder unendlich vielen Op.n

$$U^{(r_1)}, U^{(r_2)}, U^{(r_3)}, \ldots \tag{169'}$$

---

[29]) A. a. O. [1]), Abschn. 2, Kap. 1, § 2.

[30]) A. a. O. [25]).

[31]) A. a. O. [1]), Abschn. 2, Kap. 14, Formel (5).

[32]) A. a. O. [1]), Abschn. 2, Kap. 15, Theorem 44.

unabhängig bleiben; natürlich müssen dann die $\alpha_{il)}$ auch die entsprechenden Int. Bed.n erfüllen. Soll darüber hinaus das System (169) eine Gruppe definieren, so muß zugleich mit U, V auch $W = \{UV\}$ eine Lösung von (169) sein. Mit Benützung der Abkürzung

$$U^{(j)}V^{(k)} - V^{(j)}U^{(k)} = ((j), (k)), \tag{170}$$

worin (j), (k) die mit j, k numerierten Variationen der Indizes 1, 2 bedeuten, lautet die Formel (167), wenn allgemein $f_0 = f$ gesetzt wird:

$$W = \{UV\} = (2, 1) - (0, 3) = (2, 1) - (0, 12) + (0, 21). \tag{171}$$

Die Op.n von W werden dann lineare homogene Funktionen der Ausdrücke $((j), (k))$ und somit bei Berücksichtigung von (169) lineare homogene Funktionen der Ausdrücke $((r_j), (r_k))$, die sich aus den unabhängigen Op.n

$$U^{(r_1)}, U^{(r_2)}, \ldots, V^{(r_1)}, V^{(r_2)}, \ldots \tag{171'}$$

bilden lassen; die Koeffizienten dieser linearen homogenen Funktionen sind rational aus den $\alpha_{il)}$ und ihren Op.n zusammengesetzt. Auch die linken Seiten von (169) werden beim Einsetzen von $W = \{UV\}$ derartige lineare homogene Funktionen; Nullsetzen der Koeffizienten der $((r_j), (r_k))$ liefert die *Gruppen-Bedingungen*, die zusammen mit den Int. Bed.n ein System von rationalen Relationen ausmachen:

$$R_{k)}(\alpha_{11)}, \ldots, \alpha_{qm_q)}, \alpha_{11)1}, \alpha_{11)2}, \ldots) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{172}$$

In Bezug auf die Gruppe (169) gilt auch das Analogon zum Satz 9. Erweitern wir nämlich die Gruppe (169) $(n-1)$-mal durch Mitnahme von $y'', \ldots, y^{(n)}$ und bezeichnen wir mit $X^{(n)}f$ die allgemeine inf. Trf. der erweiterten Gruppe, so daß also

$$X^{(n)}f = \xi p + \eta q + \eta' q' + \eta'' q'' + \cdots + \eta^{(n)} q^{(n)}, \tag{173}$$

wobei ξ, η, η' durch (166′) und die $\eta^{(i)}$ durch die Formel (s. (9′))

$$\eta^{(i)} = \frac{d\eta^{(i-1)}}{dx} - \frac{dU_2}{dx} y^{(i)} \qquad (i = 2, 3, \ldots) \tag{173'}$$

gegeben sind, dann gelten die zu (43), (43′) analogen Formeln

$$X^{(n)}f = \sum_{i=1}^{N} U^{(r_i)} C_i f \tag{174}$$

$$C_i f = \Xi_{i)} p + \mathsf{H}_{i)} q + \mathsf{H}'_{i)} q' + \mathsf{H}''_{i)} q'' + \cdots + \mathsf{H}^{(n)}_{i)} q^{(n)} \qquad (i = 1, \ldots, N); \tag{174'}$$

$\Xi_{i)}$, $\mathsf{H}^{(k)}_{i)}$ sind ganz rational in $y'', \ldots, y^{(n)}$ mit Koeffizienten, die rational aus den $\alpha_{il)}$ und ihren Op.n aufgebaut sind, und es gilt der Satz:

Satz 17. *Die Symbole* (174′) *erfüllen die Beziehungen*

$$(C_i C_k) = \sum_{l=1}^{N} \psi_{jkl)}(x, y, y')\, C_l f \qquad (j, k = 1, \ldots, N), \tag{175}$$

wobei die $\psi_{jkl)}$ *sich rational aus den Koeffizienten von* (169) *und deren Op.n zusammensetzen.*

Der Beweis dieses Satzes verläuft dem Beweis des Satzes 9 so ähnlich, daß wir auf seine Wiedergabe verzichten können. Ferner lassen sich aus Satz 17 die analogen Schlüsse ziehen wie aus Satz 9.

3. Wichtig ist es zu wissen, wie sich die Op.n ∂_1, ∂_2 gegebenüber B. T.n der Veränderlichen x, y, y' verhalten. Bezeichnen wir die den Op.n ∂_1, ∂_2, ∂_3 entsprechenden

Op.n in den Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'$ mit $\partial_{\mathrm{I}}, \partial_{\mathrm{II}}, \partial_{\mathrm{III}}$, dann folgen bei Gleichsetzung der Ausdrücke für df aus (162) und aus

$$df = f_{\mathrm{I}} d\mathfrak{x} + f_{\mathrm{II}} d\mathfrak{y}' + f_{\mathrm{III}}(d\mathfrak{y} - \mathfrak{y}' d\mathfrak{x}) \tag{176}$$

vermöge (161), (161′) die Trf.s-Formeln

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad f_1 = X_1 f_{\mathrm{I}} + P_1 f_{\mathrm{II}}, \qquad f_2 = X_2 f_{\mathrm{I}} + P_2 f_{\mathrm{II}}, \\ &\text{(b)} \quad f_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\Delta}(P_2 f_1 - P_1 f_2), \quad f_{\mathrm{II}} = \frac{1}{\Delta}(-X_2 f_1 + X_1 f_2). \end{aligned} \tag{177}$$

Die Formeln (177 b) *bleiben bei Vertauschung der Indizes* 1, 2 *einzeln erhalten, während das Gleichungspaar* (177 a) *dabei seine Reihenfolge umkehrt.*

Wie lautet die ch. Fu. der inf. B. T.

$$\mathfrak{X} f = \hat{\xi}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')\mathfrak{p} + \hat{\eta}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')\mathfrak{q} + \hat{\eta}'(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')\mathfrak{q}', \tag{178}$$

die aus der inf. B. T. (166) durch Ausführung der B. T. (161) hervorgeht? Erinnern wir uns der eigentlichen Bedeutung des Symbols Xf bzgl. $\mathfrak{X}f$ als des Repräsentanten einer *unendlich kleinen* Trf. [33])

$$\delta f = Xf\,\delta t = \mathfrak{X} f\,\delta t.$$

Dann ist, unter $U(x, y, y')$, $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')$ die ch. Fu.n zu (166), (178) verstanden, nach der letzten Formel (166′)

$$-U\delta t = (\eta - y'\xi)\,\delta t = \delta y - y'\delta x; \qquad -\mathfrak{U}\delta t = (\hat{\eta} - \mathfrak{y}'\hat{\xi})\,\delta t = \delta\mathfrak{y} - \mathfrak{y}'\delta\mathfrak{x}.$$

Daraus ergibt sich wegen (161′) sofort [34])

$$\mathfrak{U} = \Delta U, \tag{179}$$

was natürlich durch direkte Rechnung bestätigt werden kann.

Wir unterwerfen jetzt die Defgl.n einer endlichen oder unendlichen Gruppe von B. T.n der Ebene $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ der allgemeinsten B. T. (161). Um diese Defgl.n übersichtlich schreiben zu können, numerieren wir wieder die Op.n von f bezüglich $\partial_{\mathrm{I}}, \partial_{\mathrm{II}}$, etwa nach demselben Schema wie in (168) die Op.n von f in bezug auf ∂_1, ∂_2; die Reihe der Op.n von f bezüglich $\partial_{\mathrm{I}}, \partial_{\mathrm{II}}$ schreiben wir jedoch im Unterschied zu (168) so:

$$f^{((1))}, f^{((2))}, f^{((3))}, \ldots. \tag{180}$$

Dann seien die Defgl.n unserer Gruppe gegeben durch

$$\mathfrak{a}_{i1)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')\,\mathfrak{U}^{((1))} + \cdots + \mathfrak{a}_{in_i)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')\,\mathfrak{U}^{((n_i))} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, q); \tag{181}$$

die $\mathfrak{a}$ mögen dabei die Relationen befriedigen

$$\mathfrak{R}_{k)}(\mathfrak{a}_{11)}, \ldots, \mathfrak{a}_{qn_q)}, \mathfrak{a}_{11)\mathrm{I}}, \mathfrak{a}_{11)\mathrm{II}}, \ldots) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{181′}$$

In (181) setzen wir den Ausdruck (179) für $\mathfrak{U}$ ein und bekommen vermöge (177 b) unmittelbar die Gleichungen

$$\beta_{i1)}U^{(1)} + \beta_{i2)}U^{(2)} + \cdots + \beta_{i\bar{n}_i)}U^{(\bar{n}_i)} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, q), \tag{182}$$

deren Koeffizienten $\beta_{ik)}$ linear homogen von $\mathfrak{a}_{i1)}, \ldots, \mathfrak{a}_{in_i)}$ $(i = 1, \ldots, q)$ und rational von den Op.n von X, P abhängen. Das System (182) läßt sich noch auf mannigfache Weise durch Elimination und Differentiation umformen, etwa in das System (169) mit den Relationen (172); die α hängen dabei rational von den β und ihren Op.n ab, d. h.

---

[33]) A. a. O. [1]), Abschn. 1, Kap. 3, § 13.

[34]) A. a. O. [32]), Theorem 45.

sie setzen sich (vermöge (177a)) rational zusammen aus den $\mathfrak{a}_{il)}$ sowie ihren Op.n (bezüglich ∂_{I}, ∂_{II}) und aus den Op.n von X, P:

$$(183)\quad \alpha_{il)} = A_{il)}(\mathfrak{a}_{11)}, \ldots, \mathfrak{a}_{11)\mathrm{I}}, \mathfrak{a}_{11)\mathrm{II}}, \ldots; X_1, X_2, P_1, \ldots) \quad (l = 1, \ldots, m_i;\ i = 1, \ldots, q).$$

Die Relationen (172) *sind vermöge* (165) *und* (183) *mit den Relationen* (181′) *gleichwertig.*

Da Δ bei Vertauschung der Indizes 1, 2 in $-\Delta$ übergeht, so bleibt nach der Bemerkung zu (177b) die linke Seite jeder Gleichung (182) ihrer Herleitung zufolge bei dieser Vertauschung bis auf das Vorzeichen erhalten; mithin können wir, unter $\overline{F}$ die Größe verstanden, welche aus F durch Verwechslung der Op.n ∂_1, ∂_2 hervorgeht, das System (182) auch umformen zu dem System

$$(184)\qquad \bar{\alpha}_{i1)}\overline{U^{(1)}} + \bar{\alpha}_{i2)}\overline{U^{(2)}} + \cdots + \bar{\alpha}_{im_i)}\overline{U^{(m_i)}} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, q);$$

die $\bar{\alpha}_{il)}$ finden wir aus (183) durch Vertauschung von ∂_1, ∂_2 in den $A_{il)}$. Die Relationen zwischen den $\bar{\alpha}_{il)}$ bekommen wir aus (172) durch Ausübung der Substitution

$$(185)\qquad (\partial_1\partial_2)\,(F\overline{F});$$

Diese Relationen sehen also so aus:

$$(186)\qquad R_{k)}(\bar{\alpha}_{11)}, \ldots, \bar{\alpha}_{qm_q)}, \bar{\alpha}_{11)2}, \bar{\alpha}_{11)1}, \ldots) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Daß dem so ist, folgt aus der Tatsache, daß die Relationen (186) vermöge (165) und

$$(187)\qquad \alpha_{il)} = \overline{A}_{il)} \qquad (l = 1, \ldots, m_i;\ i = 1, \ldots, q)$$

mit den Relationen (181′) äquivalent sind (die Beziehungen (165) bleiben ja gegenüber der Vertauschung von ∂_1, ∂_2 ungeändert); dies schließen wir nämlich aus der Bemerkung zu (183).

Natürlich müssen sich die Systeme (169) und (184) als äquivalente Systeme von Defgl.n derselben Gruppe auch durch direkte Umformung auseinander herleiten lassen, d. h. *die $\bar{\alpha}_{il)}$ setzen sich rational aus den $\alpha_{il)}$ und ihren Op.n zusammen und umgekehrt.* Damit ist das Analogon zu Satz 10 bewiesen:

Satz 18. *Repräsentiert das System* (169) *mit den Koeffizienten-Relationen* (172) *die Defgl.n der allgemeinen Gruppe eines Gruppentypus, dann ist es mit einem System* (184) + (186) *gleichwertig, das sich von ihm formal nur durch die Substitution* (185) *unterscheidet.*

4. Ähnlich wie in § 2, **4** führen wir jetzt die Op.n ein

$$(188)\qquad \begin{aligned} &(\mathrm{a})\quad \partial_\varrho f = f_\varrho = f_2 - \varrho(x, y, y')\, f_1, \qquad f_2 = f_\varrho + \varrho f_1,\\ &(\bar{\mathrm{a}})\quad \partial^{\bar{\varrho}} f = f^{\bar{\varrho}} = f_1 - \bar{\varrho}(x, y, y')\, f_2, \qquad f_1 = f^{\bar{\varrho}} + \bar{\varrho} f_2, \end{aligned}$$

so daß wir an Stelle von ∂_1, ∂_2 das Op.n-Paar $\partial_1, \partial_\varrho$ oder $\partial^{\bar{\varrho}}, \partial_2$ verwenden können. Die Funktionen ϱ, $\bar{\varrho}$ sollen zunächst noch in keinem Zusammenhang stehen. Als Äquivalent für die Identitäten (159) hat man bei Verwendung von $\partial_1, \partial_\varrho$ die Relationen

$$(189)\qquad \begin{aligned} &(\mathrm{a})\quad \mathfrak{D}_1 f \equiv f_{11\varrho} + f_{\varrho 11} - 2f_{1\varrho 1} + \varrho_{11} f_1 = 0,\\ &(\mathrm{b})\quad \mathfrak{D}_2 f \equiv f_{\varrho\varrho 1} + f_{1\varrho\varrho} - 2f_{\varrho 1\varrho} + \varrho_1(f_{\varrho 1} - f_{1\varrho}) + (\varrho_{\varrho 1} - 2\varrho_{1\varrho} + \varrho_1^2)\, f_1 = 0; \end{aligned}$$

die der Verwendung von $\partial_2, \partial^{\bar{\varrho}}$ entsprechenden Relationen bekommt man aus (189) offenbar mittels der Substitution

$$(190)\qquad (\partial_1\partial_2)\,(\varrho\bar{\varrho})\,(\partial_\varrho\partial^{\bar{\varrho}}),$$

welche (188a) in (188ā) verwandelt und umgekehrt. Die Op.n ∂_ϱ und $\bar\partial^{\bar\varrho}$ bezeichnen wir wieder als Op.n *erster* Stufe. Die Identitäten zwischen den Op.n 4. Stufe $f_{i_1}\ldots, f_{i_4}$ $(i_1, \ldots, i_4 = 1, \varrho)$ erhalten wir, indem wir auf (189) die Op.n ∂_1, ∂_ϱ ausüben und indem wir in (189) f durch f_1, f_ϱ ersetzen. Dabei ergeben sich jedoch nicht 8 sondern nur 7 unabhängige Beziehungen. Durch Einsetzen von f_1, f_ϱ an Stelle von f in (189) kommt nämlich

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad f_{111\varrho} + f_{1\varrho 11} - 2f_{11\varrho 1} + \varrho_{11} f_{11} = 0,\\
&\text{(b)}\quad f_{\varrho 11\varrho} + f_{\varrho\varrho 11} - 2f_{\varrho 1\varrho 1} + \varrho_{11} f_{\varrho 1} = 0,\\
&\text{(c)}\quad f_{1\varrho\varrho 1} + f_{11\varrho\varrho} - 2f_{1\varrho 1\varrho} + \varrho_1(f_{1\varrho 1} - f_{11\varrho}) + (\varrho_{\varrho 1} - 2\varrho_{1\varrho} + \varrho_1^2) f_{11} = 0,\\
&\text{(d)}\quad f_{\varrho\varrho\varrho 1} + f_{\varrho 1\varrho\varrho} - 2f_{\varrho\varrho 1\varrho} + \varrho_1(f_{\varrho\varrho 1} - f_{\varrho 1\varrho}) + (\varrho_{\varrho 1} - 2\varrho_{1\varrho} + \varrho_1^2) f_{\varrho 1} = 0.
\end{aligned} \tag{191}$$

Subtrahieren wir von (191c) die Relation $(\mathfrak{D}_1 f)_\varrho = 0$, so wird

$$f_{1\varrho\varrho 1} - f_{\varrho 11\varrho} + \varrho_1(f_{1\varrho 1} - f_{11\varrho}) - \varrho_{11} f_{1\varrho} + (\varrho_{\varrho 1} - 2\varrho_{1\varrho} + \varrho_1^2) f_{11} - \varrho_{11\varrho} f_1 = 0, \tag{191'}$$

während Subtraktion der Relation $(\mathfrak{D}_2 f)_1 = 0$ von (191b) liefert

$$f_{\varrho 11\varrho} - f_{1\varrho\varrho 1} + \cdots = 0, \tag{191''}$$

wo die Punkte Glieder mit Op.n 3. und niedrigerer Stufe bedeuten. Folglich muß (191″) mit (191′) vermöge (189) identisch sein, denn außer (189) gibt es keine Identitäten zwischen den Op.n 3. Stufe. *Demnach können wir nach Belieben die Relationen* (191a, d) + (191′) *oder* (191a, b, d) *oder* (191a, c, d) *zusammen mit den Relationen*

$$(\mathfrak{D}_i f)_k = 0 \qquad (i = 1, 2;\ k = 1, \varrho) \tag{192}$$

als die 7 *unabhängigen Identitäten* 4. *Stufe ansehen.* Die Relationen 5. Stufe folgen aus den Relationen 4. Stufe wieder durch Ausübung von ∂_1, ∂_ϱ und durch Einsetzen von f_1, f_ϱ an Stelle von f; ebenso findet man die Identitäten 6. Stufe aus denen der 5. usw. Wir wollen diese Identitäten 3., 4., 5., . . . Stufe die *∂-Relationen* nennen.

Das Theorem 3 *bleibt in sinngemäßer Abänderung auch bezüglich der Op.n* ∂_1, ∂_ϱ *bestehen.* Wir beweisen nun den folgenden Satz, der uns viele nützliche Dienste leisten wird:

Satz 19. *Sind die beiden Diffgl.n*

$$f_\varrho = u(f), \quad f_{1\varrho} = v(f, f_1), \tag{193}$$

in denen auch $f = \varrho$ *sein darf, mit der Identität* (189b) *verträglich, dann vertragen sie sich mit allen ∂-Relationen, und die Diffgl.n* (193) *besitzen* ∞^∞ *Lösungen.*

Der Beweis dieses Satzes, den wir jetzt führen werden, ändert sich in nichts, wenn wir $f = \varrho$ wählen. Zunächst kommt es darauf an, die ∂-Relationen zum Zwecke dieses Beweises in einer geeigneten Form darzustellen. Die ∂-Relationen 4. Stufe können wir folgendermaßen schreiben, wenn die Relation (191c) als überzählig weggelassen wird:

$$\text{(a)}\ (\mathfrak{D}_j f)_k = 0 \quad \text{(b)}\ \mathfrak{D}_j f_\varrho = 0 \quad \text{(c)}\ \mathfrak{D}_1 f_1 = 0 \qquad (j = 1, 2;\ k = 1, \varrho). \tag{194}$$

Die ∂-Relationen höherer Stufe können dann aus (194) durch wiederholte Anwendung von ∂_1, ∂_ϱ und Substitution von f_1, f_ϱ für f hergeleitet werden; die ∂-Relationen s-ter Stufe sehen daher so aus

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad (\mathfrak{D}_j f_{i_1\ldots i_q})_{k i_{q+1}\ldots i_{s-4}} = 0, \qquad \text{(b)}\quad (\mathfrak{D}_j f_{i_1\ldots i_q\varrho})_{i_{q+1}\ldots i_{s-4}} = 0,\\
&\text{(c)}\quad (\mathfrak{D}_1 f_{i_1\ldots i_q 1})_{i_{q+1}\ldots i_{s-4}} = 0 \qquad (j = 1, 2;\ k, i_1, \ldots, i_{s-4} = 1, \varrho;\ 0 \leqq q \leqq s-4).
\end{aligned} \tag{195}$$

Führen wir die Bezeichnung ein

$$\partial_i^h f = f_{\underbrace{i \ldots i}_{h\text{-mal}}} = f_{i^h}, \tag{196}$$

dann können wir vermöge (193) und der ∂-Relationen sämtliche Op.n $f_{i_1 \ldots i_s}$, in denen wenigstens *einmal* der Index ϱ auftritt, ausdrücken durch $f, f_1, f_{11}, \ldots, f_{1^{s-1}}$:

$$f_{i_1 \ldots i_s} = w_{i_1 \ldots i_s)}(f, f_1, \ldots, f_{1^{s-1}}) \qquad (i_1, \ldots, i_s = 1, \varrho, \text{ nicht alle} = 1). \tag{197}$$

Die Relationen (193) und (197) nennen wir *w-Relationen*. Die Gültigkeit der Formeln (197) beweisen wir durch Induktion. Für $s = 1, 2$ fallen sie mit den Diffgl.n (193) zusammen. Angenommen, wir haben die w-Relationen bis zur $(s-1)$-ten Stufe aufgestellt; dann ergeben sich die Op.n $f_{i_1 \ldots i_{s-1} k}$ $(k = 1, \varrho; i_1, \ldots, i_{s-1} = 1, \varrho,$ nicht alle $= 1)$ durch Anwendung der Op.n $\partial_1, \partial_\varrho$ auf diese Relationen als Ausdrücke der Form (197). Die Op. $f_{1^{s-1}\varrho}$ finden wir als Ausdruck in $f, f_1, \ldots, f_{1^{s-1}}$ aus der ∂-Relation

$$\mathfrak{D}_1 f_{1^{s-3}} = f_{1^{s-1}\varrho} + f_{1^{s-3}\varrho 11} - 2 f_{1^{s-2}\varrho 1} + \varrho_{11} f_{1^{s-2}} = 0. \tag{198}$$

Nun erhebt sich die Frage, ob die w-Relationen auch mit den ∂-Relationen verträglich sind. Für die dritte Stufe gibt es nach Voraussetzung und nach den Bemerkungen über die Gewinnung der w-Relationen *keinen* Widerspruch. Wir nehmen daher an, daß die Verträglichkeit der w-Relationen mit den ∂-Relationen bis einschließlich zur $(s-1)$-ten Stufe bewiesen sei. Dann liegt uns der Nachweis ob, daß auch die Relationen (195) eine Folge der Relationen (197) und der w-Relationen niedrigerer Stufe sind. Betrachten wir die Relationen (195a): innerhalb der Klammer steht die linke Seite einer ∂-Relation von höchstens $(s-1)$-ter Stufe; diese ist aber nach Annahme identisch Null vermöge der w-Relationen 1. bis $(s-1)$-ter Stufe. Was die Relationen (195b) angeht, so ist der Ausdruck innerhalb der Klammer gleich

$$\mathfrak{D}_j w_{i_1 \ldots i_q \varrho)}(f, f_1, \ldots, f_{1^q}) \qquad (j = 1, 2; q \leqq s-4). \tag{199}$$

Der Ausdruck (199) verschwindet aber *gemeinhin* vermöge der ∂-Relationen 3. bis $(q+3)$-ter Stufe für f, d. h. er verschwindet nach Annahme vermöge der w-Relationen 1. bis $(q+3)$-ter Stufe. Wenden wir uns zu den Relationen (195c), dann haben wir für $q < s-4$ Relationen der Form (195a) vor uns; es bleibt also noch der Fall $q = s-4$ zu erledigen. Ist nun $f_{i_1 \ldots i_{s-4} 1} \neq f_{1^{s-3}}$, dann schließen wir analog wie bezüglich des Ausdruckes (199) auch auf das Verschwinden des Ausdruckes $\mathfrak{D}_1 f_{i_1 \ldots i_{s-4} 1} = \mathfrak{D}_1 w_{i_1 \ldots i_{s-4} 1)}$. Ist endlich $f_{i_1 \ldots i_{s-4} 1} = f_{1^{s-3}}$, dann liegt die Relation (198) vor, die aber vermöge der übrigen w-Relationen 1. bis s-ter Stufe mit der Relation (197) für $i_1, \ldots, i_{s-1} = 1, i_s = \varrho$ äquivalent ist. Damit ist der erste Teil des Satzes 19 bewiesen und es ist zugleich gezeigt, *daß vermöge der Diffgl.n* (193) *die unendlich vielen Op.n* $f, f_1, f_{11}, \ldots$ *unabhängig bleiben.*

Um noch den zweiten Teil des Satzes 19 zu beweisen, fügen wir zu (193) noch eine Diffgl. der Form

$$f_{1^h} = w(f, f_1, \ldots, f_{1^{h-1}}) \qquad (h \geqq 2) \tag{200}$$

hinzu, so daß vermöge (193) + (200) alle Op.n h-ter Stufe von f durch $f, f_1, \ldots, f_{1^{h-1}}$ ausdrückbar sind. Wählen wir die Funktion w in (200) so, daß die nach Anweisung von Theorem 3 zu bestimmenden Int. Bed.n erfüllt sind, dann besitzen die Diffgl.n (193) + (200) ∞^h Lösungen; da die Zahl h beliebig groß gewählt werden darf, gelangen wir

so zu unbegrenzt vielen Lösungen der Diffgl.n (193). Man überlegt sich ferner mühelos, daß auf Grund von Theorem 3 und Satz 19 der weitere Satz gilt:

Satz 20. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 19 *findet man die Int. Bed.n zu dem System* (193), (200), *indem man in den linken Seiten der Identitäten* (198) *für* $s = h + 1$ *und* $s = h + 2$ *die Op.n h-ter und höherer Stufe durch* $f, f_1, \ldots, f_{1^{h-1}}$ *ausdrückt und verlangt, daß wieder Identitäten entstehen.*

5. Bilden wir in den Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'$ die Operation $f_\mathfrak{r} = f_{II} - \mathfrak{r}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')\, f_I$, so entsteht die Aufgabe, geeignete Formeln für die Trf. von $\partial_I, \partial_\mathfrak{r}$ in gewisse Op.n $\partial_1, \partial_\varrho$ vermöge der B. T. (161) zu finden, etwa derart, daß $f_\mathfrak{r}$ nur von f_ϱ abhängt. Aus (177b) folgt

$$f_\mathfrak{r} = \frac{X_1 + P_1\mathfrak{r}}{\Delta}\left(f_2 - \frac{X_2 + P_2\mathfrak{r}}{X_1 + P_1\mathfrak{r}} f_1\right); \tag{201}$$

setzen wir also

$$\text{(a)} \quad \varrho = \frac{X_2 + P_2\mathfrak{r}}{X_1 + P_1\mathfrak{r}}, \qquad \text{(b)} \quad \mathfrak{r} = -\frac{X_\varrho}{P_\varrho}, \tag{202}$$

dann lauten die gesuchten Formeln wegen (202b) und wegen

$$\Delta = P_2 X_1 - X_2 P_1 = P_\varrho X_1 - X_\varrho P_1 \tag{203}$$

folgendermaßen:

$$f_\mathfrak{r} = \frac{1}{P_\varrho} f_\varrho, \qquad f_I = \frac{1}{\Delta}(P_\varrho f_1 - P_1 f_\varrho). \tag{204}$$

Nach der Bemerkung zu (177b) muß auch die Formel richtig sein, die sich aus (201) durch Vertauschung von ∂_1, ∂_2 ergibt; mithin sind auch die Relationen richtig, die wir aus (202) — (204) mittels der Substitution (190) gewinnen:

$$\text{(a)} \quad \bar{\varrho} = \frac{X_1 + P_1\mathfrak{r}}{X_2 + P_2\mathfrak{r}} = \frac{1}{\varrho}, \qquad \text{(b)} \quad \mathfrak{r} = -\frac{X^{\bar{\varrho}}}{P^{\bar{\varrho}}}, \tag{205}$$

$$\bar{\Delta} = P^{\bar{\varrho}} X_2 - X^{\bar{\varrho}} P_2 = -\Delta, \tag{206}$$

$$f_\mathfrak{r} = \frac{1}{P^{\bar{\varrho}}} f^{\bar{\varrho}}, \qquad f_I = \frac{1}{\bar{\Delta}}(P^{\bar{\varrho}} f_2 - P_2 f^{\bar{\varrho}}). \tag{207}$$

Wie sich der Satz 18 modifiziert, wenn wir die Op.n (188) benützen, wobei jetzt $\varrho\bar{\varrho} = 1$ zu wählen ist, läßt sich leicht angeben; bezeichnen mir mit $\bar{F}$ die Größe, welche aus F durch die Substitution (190) hervorgeht und bilden wir die Substitution

$$\mathfrak{S} = (\partial_1 \partial_2)\,(\varrho\bar{\varrho})\,(\partial_\varrho \partial^{\bar{\varrho}})\,(F\bar{F}) \qquad (\varrho\bar{\varrho} = 1), \tag{208}$$

so gilt:

Satz 21. *Der Satz* 18 *bleibt unverändert gültig, wenn wir die Gleichungen* (169), (172) *in den Op.n* $\partial_1, \partial_\varrho$, *die Gleichungen* (184) + (186) *in den Op.n* $\partial_2, \partial^{\bar{\varrho}}$ *schreiben und die Substitution* $\mathfrak{S}$ *an die Stelle der Substitution* (185) *treten lassen.*

Eine gewöhnliche Diffgl. 2. O.

$$\mathfrak{r}\mathfrak{y}'' + 1 = 0 \tag{209}$$

geht durch die B. T. (161) wegen

$$\mathfrak{y}'' = \frac{d\mathfrak{y}'}{d\mathfrak{x}} = \frac{P_2 y'' + P_1}{X_2 y'' + X_1} \tag{210}$$

über in die Diffgl.

$$\varrho y'' + 1 = 0, \tag{211}$$

wo ϱ den Wert (202a) besitzt. Der innere Grund dafür liegt darin, daß sich die Integration der Diffgl. (209) zurückführen läßt auf die Integration der linearen homogenen partiellen Diffgl. 1. O.

$$f_\mathfrak{r} = f_{\mathrm{II}} - \mathfrak{r} f_{\mathrm{I}} = 0; \tag{212}$$

ist nämlich f eine Lösung von (212), so werden durch

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}') = \text{const.} \tag{213}$$

∞^1 *erste Integrale* von (209) dargestellt. Folglich sind die beiden Diffgl.n (209) und (212) einander gleichwertig; die Trf.s-Formeln (202) — (204) sind aber so eingerichtet worden, daß die Diffgl. (212) vermöge der B. T. (161) in $f_\varrho = 0$ übergeht; mithin muß (209) in die zu $f_\varrho = 0$ äquivalente Diffgl. (211) verwandelt werden.

Wählen wir $\mathfrak{r} = 0$, dann vereinfachen sich die Formeln (202)—(207) zu

$$\text{(a)}\quad \varrho = \frac{X_2}{X_1}, \qquad \text{(b)}\quad X_\varrho = 0, \qquad \text{(c)}\quad \Delta = P_\varrho X_1, \tag{214}$$

$$f_{\mathrm{II}} = \frac{1}{P_\varrho} f_\varrho, \quad f_{\mathrm{I}} = \frac{1}{X_1} f_1 - \frac{P_1}{\Delta} f_\varrho = \frac{1}{X_1} f_1 - \frac{P_1}{X_1} f_{\mathrm{II}}, \tag{215}$$

$$\text{(a)}\quad \bar{\varrho} = \frac{X_1}{X_2} = \frac{1}{\varrho}, \qquad \text{(b)}\quad X^{\bar{\varrho}} = 0, \qquad \text{(c)}\quad \bar{\Delta} = P^{\bar{\varrho}} X_2 = -\Delta, \tag{216}$$

$$f_{\mathrm{II}} = \frac{1}{P^{\bar{\varrho}}} f^{\bar{\varrho}}, \quad f_{\mathrm{I}} = \frac{1}{X_2} f_2 - \frac{P_2}{\bar{\Delta}} f^{\bar{\varrho}} = \frac{1}{X_2} f_2 - \frac{P_2}{X_2} f_{\mathrm{II}}. \tag{217}$$

Die Relationen (165) lauten in $\partial_1, \partial_\varrho$ geschrieben wegen (214 a, b):

$$\text{(a)}\ P_\varrho X_{11} + P_1 X_{1\varrho} + X_1(2P_{\varrho 1} - P_{1\varrho}) = 0, \qquad \text{(b)}\ X_1 P_{\varrho\varrho} + 2P_\varrho X_{1\varrho} - \varrho_1 P_\varrho X_1 = 0; \tag{218}$$

am einfachsten gewinnt man sie, indem man die Relationen (189) für $f = Y$ bildet und dabei die mit (163) identischen Relationen

$$Y_1 = PX_1, \quad Y_\varrho = 0 \tag{219}$$

berücksichtigt. Dabei sind die Relationen

$$\text{(a)}\ X_{11\varrho} - 2X_{1\varrho 1} + \varrho_{11} X_1 = 0, \qquad \text{(b)}\ X_{1\varrho\varrho} - \varrho_1 X_{1\varrho} + (\varrho_{\varrho 1} - 2\varrho_{1\varrho} + \varrho_1^2) X_1 = 0 \tag{220}$$

zu benutzen, die aus (189) für $f = X$ wegen $X_\varrho = 0$ folgen.

6. Wir haben es im folgenden, von einer Ausnahme abgesehen, mit *reduziblen* B.T.s-Gruppen zu tun, d. h. mit solchen, die durch B.T. mit P.T.s-Gruppen ähnlich sind. Die unendliche Gruppe *aller* P.T.n der Ebene kann aufgefaßt werden als die Gruppe der B.T.n (161), welche die Diffgl. $\mathfrak{y}'' = \infty$, die *Diffgl. der Punkte* [35]), invariant lassen. Aus (202 a) folgt nämlich, falls $\varrho = \mathfrak{r} = 0$ ist, $X_2 = 0$ und daraus wegen (163) $Y_2 = 0$. *Demnach sind die reduziblen B.T.s-Gruppen identisch mit den Gruppen, welche eine gewöhnliche Diffgl. 2. O. ungeändert lassen; denn die Diffgl.* (211) *kann immer durch eine B. T.* (161) *in* $\mathfrak{y}'' = \infty$ *verwandelt werden*, indem X als Lösung der Diffgl. $X_\varrho = 0$ gewählt wird, was auf unbegrenzt viele Arten geschehen kann. Die inf. B. T. (166) ist nach (166′) dann und nur dann eine inf. P. T., wenn $U_{22} = 0$. Also definiert

$$\mathfrak{U}_{\mathrm{II\,II}} = 0 \tag{221}$$

---

[35]) A. a. O. [24]), § 1, 3.

die unendliche Gruppe aller P.T.n der Ebene $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$. Die Gleichung (221) transformieren wir mittels (161); wir erhalten zunächst vermöge (214), (215) wegen (218 b)

$$\mathfrak{U}_{II} = X_1 U_\varrho + (\varrho_1 X_1 - X_{1\varrho})\, U = X_1 (U_\varrho - \sigma U), \tag{222}$$

$$\sigma = \frac{X_{1\varrho}}{X_1} - \varrho_1, \tag{222'}$$

so daß wir mit Rücksicht auf (220b) die Gleichung bekommen

$$U_{\varrho\varrho} = -\varrho_1 U_\varrho + (\varrho_{1\varrho} - \varrho_{\varrho 1} - \varrho_1^2)\, U \equiv -\varrho_1 U_\varrho + \varrho_3 U, \tag{223}$$

welche die Gruppe der Diffgl. (211) definiert. Die Gleichung (223) kann man natürlich auch direkt durch die Forderung der Invarianz von (211) gewinnen, und zwar unter Benutzung von (166″) und der Formel

$$\eta'' = -U_{11} - (U_{12} + U_{21})\, y'' - U_{22} y''^2, \tag{224}$$

die sich aus (166′) und (173′) für $i = 2$ ergibt.

Zwischen den Größen ϱ, σ in (222′) besteht eine wichtige Beziehung; rechnen wir nämlich die Relation (220b) vermöge (214b), (222′) oder

$$X_\varrho = 0, \quad X_{1\varrho} = (\varrho_1 + \sigma)\, X_1 \tag{225}$$

aus, so folgt nach Abspaltung des Faktors X_1:

$$\boxed{\sigma_\varrho = -\sigma(\varrho_1 + \sigma) + \varrho_{1\varrho} - \varrho_{\varrho 1} - \varrho_1^2 \equiv -\sigma(\varrho_1 + \sigma) + \varrho_3.} \tag{226}$$

Nach Satz 19 *besitzen die Diffgl.n* (225) *vermöge* (226) ∞^∞ *Lösungen* X.

Den Schluß dieses Paragraphen möge der folgende leicht einzusehende Satz bilden:

Satz 22. *Eine Gruppe von P. T.n der Ebene kann dann und nur dann durch eine eigentliche B.T. wieder in eine Gruppe von P.T.n verwandelt werden, wenn sie wenigstens eine reguläre gewöhnliche Diffgl. 2. O. invariant läßt.*

Eigentlich heißt dabei eine B. T., wenn sie keine erweiterte P. T. ist.

§ 5. Die Defgl.n der allgemeinsten B. T.s-Gruppen $\mathcal{G}_{n+1}$, $\mathcal{G}^1_{n+1}$ und die zugehörige Diffgl. $\mathcal{D}_n$.

1. Wir haben zunächst festzustellen, wie sich die Betrachtungen des § 1 modifizieren, wenn jetzt auch B.T.n ins Spiel kommen. Da ist vor allem bedeutsam der folgende

Satz 23. *Eine gewöhnliche lineare Diffgl. von höherer als 3. O. ist nach Ausführung einer eigentlichen B. T. nicht mehr linear.*

Der Beweis verläuft analog dem des Satzes 1. Die lineare Diffgl. n-ter O., welche durch (161) transformiert werden soll, sei

$$\mathfrak{y}^{(n)} - \mathfrak{a}_{n-1)}(\mathfrak{x})\, \mathfrak{y}^{(n-1)} - \cdots - \mathfrak{a}_{0)}(\mathfrak{x})\, \mathfrak{y} - \mathfrak{b}(\mathfrak{x}) = 0. \tag{227}$$

Wegen (210) haben wir die Trf.s-Formeln

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{y}''' &= \frac{\Delta y''' + G(y'')}{(X_2 y'' + X_1)^3}, \\ \mathfrak{y}^{(i)} &= \frac{1}{(X_2 y'' + X_1)^i}\left(\Delta y^{(i)} - \frac{m_{i-1} X_2 \Delta y''' y^{(i-1)}}{X_2 y'' + X_1} + \frac{G(y'')\, y^{(i-1)} + G(y'', \ldots, y^{(i-2)})}{(X_2 y'' + X_1)^{i-3}}\right) \\ &\qquad (i = 4, 5, \ldots). \end{aligned}\right. \tag{228}$$

G bedeutet eine ganze rationale Funktion ihrer Argumente, während die m_j dieselben Zahlen wie in (3′) sind. Tragen wir die Ausdrücke (228) in (227) ein, so entsteht eine

Diffgl., in der die Verbindung $y'''y^{(n-1)}$ $(n>3)$ dann und nur dann auftritt, wenn $X_2 \neq 0$, d. h. wenn die B. T. (161) eine *eigentliche* ist. Damit ist der Satz 23 bewiesen.

Nach Satz 23 gestattet eine Diffgl. der Form (2) für $n>3$ nur P.T.n; bezeichnen wir daher wieder mit $\mathfrak{D}_n$ eine gewöhnliche Diffgl. n-ter O., welche durch B. T. lineare homogene Form annehmen kann, so haben wir auf Grund von Satz 5 den Satz:

Satz 24. *Eine $\mathfrak{D}_n$ mit $n>3$ gestattet genau eine $\mathfrak{G}_{n+1}$ von B. T.n.*

Satz 4 liefert in Verknüpfung mit den Ausführungen in § 4, **6**:

Satz 25. *Eine $\mathfrak{G}_{n+1}$ von B. T.n besitzt eine Invariante 1. O. $X(x, y, y')$ und je eine Differential-Invariante $(n+i)$-ter O. $(i=1, 2, \ldots)$. Sie läßt eine Diffgl. 2. O. der Form* (211) *und eine $\mathfrak{D}_n$ invariant, jedoch für $n \geqq 2$ keine weiteren Diffgl.n, deren Ordnungen zwischen den Zahlen* 1 *und* $n+1$ *liegen.*

Es findet also im Gebiet der B. T.n ebenfalls eine umkehrbar-eindeutige Zuordnung zwischen den Gruppen $\mathfrak{G}_{n+1}$ und den Diffgl.n $\mathfrak{D}_n$ statt, allerdings erst für $n>3$. In diesen Fällen ist daher die größte Gruppe von B. T.n, in der eine $\mathfrak{G}_{n+1}$ invariant enthalten ist, zugleich die größte Gruppe, die von der zugeordneten $\mathfrak{D}_n$ gestattet wird. Aus Satz 23 ist zu schließen, daß diese größte Gruppe $(n+1)$-, $(n+2)$- oder $(n+4)$-gliedrig ist, je nachdem eine $\mathfrak{G}^{\mathrm{I}}_{n+1}$, $\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}_{n+1}$ oder $\mathfrak{G}^{\mathrm{III}}_{n+1}$ bzgl. $\mathfrak{D}^{\mathrm{I}}_n$, $\mathfrak{D}^{\mathrm{II}}_n$ oder $\mathfrak{D}^{\mathrm{III}}_n$ vorliegt. Für die Gruppen $\mathfrak{G}_{n+1}$ trifft dieser Schluß sogar schon bei der Voraussetzung $n>1$ zu, denn es gilt der Satz:

Satz 26. *Eine Gruppe der Form* (11), *also eine erweiterte P.T.s-Gruppe, die von den inf. Trf.n mit den ch. Fu.n*

$$\mathfrak{Q}_{1)}(\mathfrak{x}), \ldots, \mathfrak{Q}_{n)}(\mathfrak{x}), \mathfrak{y} \tag{229}$$

erzeugt wird, gestattet für $n>1$ keine eigentliche B. T.

Eine inf. B. T. mit der ch. Fu. $\mathfrak{U}$ nämlich, welche die Gruppe (229) invariant läßt, läßt auch ihre Derivierte

$$\mathfrak{Q}_{1)}(\mathfrak{x}), \ldots, \mathfrak{Q}_{n)}(\mathfrak{x}) \tag{229'}$$

ungeändert, d. h. sie befriedigt nach (167) gewisse Gleichungen der Form

$$\mathfrak{Q}'_{j)}\mathfrak{U}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{Q}_{j)}\mathfrak{U}_{\mathrm{III}} = \sum_{k=1}^{n} c_{k)}\mathfrak{Q}_{k)}, \qquad (j=1, \ldots, n),$$

aus deren beiden ersten durch Elimination von $\mathfrak{U}_{\mathrm{III}}$ folgt

$$(\mathfrak{Q}_{1)}\mathfrak{Q}'_{2)} - \mathfrak{Q}_{2)}\mathfrak{Q}'_{1)})\mathfrak{U}_{\mathrm{II}} = \mathrm{Fu.}\,(\mathfrak{x}), \text{ also } \mathfrak{U}_{\mathrm{II\,II}} = 0,$$

w. z. b. w. Demnach erleidet der Satz 8 nur eine geringfügige Abänderung:

Satz 27. *Wenn B.T.n berücksichtigt werden, so ist eine $\mathfrak{D}_n$ $(n \geqq 4)$ bzgl. $\mathfrak{G}_{n+1}$ $(n \geqq 2)$ dann und nur dann eine $\mathfrak{D}^{\mathrm{I}}_n, \mathfrak{D}^{\mathrm{II}}_n, \mathfrak{D}^{\mathrm{III}}_n$ bzgl. $\mathfrak{G}^{\mathrm{I}}_{n+1}, \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}_{n+1}, \mathfrak{G}^{\mathrm{III}}_{n+1}$, wenn sie $0, 1, \infty^2$ $\mathfrak{G}^{1}_{n+1}$ gestattet.*

Die in Satz 27 gegenüber Satz 8 enthaltene Ausnahme der Diffgl.n $\mathfrak{D}_3$ beruht auf dem Umstand, daß die größte von der Diffgl. $y'''=0$ gestattete Gruppe von B. T.n *nicht* die Gruppe (31) für $n=3$, also *nicht* die G_7 ist, deren inf. Trf.n durch die ch. Fu.n

$$1, x, x^2, y;\ y', xy', x(xy'-2y) \tag{230}$$

bestimmt sind; die Diffgl. $y'''=0$ gestattet vielmehr die *zehngliedrige* irreduzible B. T.s-Gruppe [36])

$$1, x, x^2, y;\ y', xy', x(xy'-2y);\ y'^2, y'(xy'-2y), (xy'-2y)^2. \tag{231}$$

[36]) A. a. O. [1]), Abschn. 2, Kap. 24, § 106, Theorem 71.

Diese G_{10} umfaßt ∞^3 mit der G_7 (230) ähnliche und sogar gleichberechtigte Untergruppen. Denn unterwerfen wir die G_7 (230) der B. T. T, dann muß die so entstehende Gruppe $G_7(T)$, wenn sie in der G_{10} (231) enthalten sein soll, wieder die Diffgl. $y''' = 0$ invariant lassen, andererseits aber auch die Diffgl. $\mathcal{D}_3^{\mathrm{III}}(T)$, welche aus $y''' = 0$ vermöge T hervorgeht. Nun läßt aber eine Gruppe vom Typ (230) nur *eine* Diffgl. 3. O. invariant, nämlich die $\mathcal{D}_3^{\mathrm{III}}$ ihrer invarianten Untergruppe vom Typ

$$1,\ x,\ x^2,\ y. \tag{232}$$

Folglich muß die Diffgl. $\mathcal{D}_3^{\mathrm{III}}(T)$ mit $y''' = 0$ identisch sein, d. h. T ist eine B. T. der G_{10} (231). Ferner wird die G_7 (230) in der G_{10} (231) *dreigliedrig* transformiert, da sie von keiner regulären Diffgl. 2. O. gestattet wird und somit nach Satz 22 keiner *eigentlichen* B. T. gegenüber ungeändert bleiben kann. Aus demselben Grunde wird auch die $\mathcal{G}_{3+1}^{\mathrm{III}}$ (232) in (231) dreigliedrig transformiert, und da die G_{10} (231) mit jeder $\mathcal{G}_{3+1}^{\mathrm{III}}$ auch die von ihr gestattete G_7 umfaßt, so gilt der

Satz 28. *Die Diffgl. $y''' = 0$ gestattet ∞^3 Gruppen $\mathcal{G}_{3+1}^{\mathrm{III}}$, und diese sind in der G_{10} (231) gleichberechtigt.*

Im nächsten Paragraphen werden wir sehen, daß eine $\mathcal{D}_3^{\mathrm{III}}$ *nur* Gruppen $\mathcal{G}_{3+1}$ vom Typus (232) gestattet, sowie daß einer $\mathcal{D}_3^{\mathrm{I}}$, $\mathcal{D}_3^{\mathrm{II}}$ nur *eine* $\mathcal{G}_{3+1}$ zugeordnet ist. Daraus sowie aus Satz 23 und der Bemerkung zu (6) schließt man auf den

Satz 29. *Kann eine $\mathcal{D}_n$ durch P. T. lineare homogene Form erhalten, dann nimmt sie auch ihre speziellste lineare homogene Form bereits durch P. T. an.*

Als unmittelbare Folge der Sätze 22 und 4 ergibt sich endlich noch der

Satz 30. *Die allgemeinste $\mathcal{G}_{n+1}$ $(n > 2)$ von P. T.n entsteht aus der allgemeinen Gruppe* (11) *durch Ausführung der allgemeinsten P. T.* (1).

2. Nach den bisherigen Vorbereitungen können wir darangehen, die Entwicklungen des § 2 von Ziffer **5—9** auf B. T.n auszudehenen. Zunächst ist es nötig, die Defgl.n der allgemeinen B. T.s-Gruppen $\mathcal{G}, \mathcal{G}_\infty, \mathcal{G}_{\infty+1}$ aufzustellen. Die Defgl.n der Gruppen (77), (78), (80) lauten bezüglich der ch. Fu. $\mathfrak{U}$:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}): \qquad \mathfrak{U}_{\mathrm{II}} = 0, \tag{233}$$

$$\mathfrak{y}, \mathfrak{Q}(\mathfrak{x}): \qquad \mathfrak{U}_{\mathrm{II}} = 0,\ \mathfrak{U}_{\mathrm{III}} = 0, \tag{234}$$

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{x}): \qquad \mathfrak{U}_{\mathrm{II}} = 0,\ \mathfrak{U}_{\mathrm{II}} = 0. \tag{235}$$

(Die allgemeinsten P. T.s-Gruppen $\mathcal{G}, \mathcal{G}_{\infty+1}, \mathcal{G}_\infty$ entstehen aus (233)—(235) durch die allgemeinste P. T. (1); das folgt aus Satz 22, insofern nämlich eine reguläre gewöhnliche Diffgl. 2. O. höchstens eine achtgliedrige Gruppe von P. T.n gestattet) [37]. Die allgemeinste Gruppe $\mathcal{G}$ wird wegen (222) definiert durch

$$\boxed{\mathcal{G}(\varrho, \sigma): \quad U_\varrho = \sigma U,} \tag{236}$$

wo ϱ, σ durch (226) verknüpft sind. (236) ist natürlich eine Untergruppe von (223), und zwar wegen (226); sie ist außerdem die unendliche Gruppe der Invariante $X(x, y, y')$, wenn (236) durch die B. T. (161) aus (233) gewonnen ist. Aus der letzteren Tatsache gelangt man ebenfalls zu der Defgl. (236), und zwar mittels (166″). Daß die Gruppe (236) die Diffgl. (211) invariant läßt, kann man auch so einsehen: Jede der ∞^1 Gleichungen

$$X(x, y, y') = \mathrm{const}. \tag{236′}$$

[37]) A. a. O. [24]), § 2, Satz 4, und a. a. O. [21]), XVII, 2.

gestattet die Gruppe (236); differenzieren wir (236′) total nach X, dann muß auch die entstehende Diffgl.

$$X_2 y'' + X_1 = 0, \tag{236''}$$

d. i. die Diffgl. (211) + (214a), invariant sein. Unter den unendlich vielen gewöhnlichen Diffgl.n 2. O., welche die Gruppe (236) gestatten, spielt also die Diffgl. (211) eine ausgezeichnete Rolle, insofern ihre ∞^1 ersten Integrale (236′) ebenfalls invariant sind.

Die Transformation der Gleichungen (235) erfordert einige Erörterungen. Wir bekommen zunächst vermöge (214), (215) und (179)

$$\mathfrak{U}_{\mathrm{I}} = P_\varrho U_1 - \frac{P_1}{X_1}\mathfrak{U}_{\mathrm{II}} + \frac{\Delta_1}{X_1 \Delta}\mathfrak{U}. \tag{237}$$

Aus (237) finden wir unter Berücksichtigung der wegen (222′) mit (218b) äquivalenten Formel

$$\frac{P_{\varrho\varrho}}{P_\varrho} = -(\varrho_1 + 2\sigma) \tag{238}$$

und unter Verwendung der Bezeichnung

$$\pi = \frac{\varrho_1 \Delta_1 - \Delta_{1\varrho}}{\Delta} \tag{239}$$

den folgenden Ausdruck für $\mathfrak{U}_{\mathrm{I\,II}}$:

$$\mathfrak{U}_{\mathrm{I\,II}} = U_{1\varrho} - (\varrho_1 + 2\sigma)\, U_1 - \pi U - \frac{P_1}{X_1}\mathfrak{U}_{\mathrm{II\,II}} + \left(\frac{\Delta_1}{X_1 \Delta} - \left(\frac{P_1}{X_1}\right)_{\mathrm{II}}\right)\mathfrak{U}_{\mathrm{II}}. \tag{240}$$

(239) läßt sich umgestalten in

$$\pi = -\frac{P_{\varrho 1\varrho} + \sigma P_{\varrho 1}}{P_\varrho} - \varrho_{11} - 2\sigma_{11}, \tag{241}$$

wozu wir uns zweckmäßig der aus (220a) und (225) resultierenden Relation bedienen

$$X_{11\varrho} = 2(\varrho_1 + \sigma)\, X_{11} + (\varrho_{11} + 2\sigma_1)\, X_1. \tag{242}$$

Die gewünschten Defgl.n der allgemeinen $\mathcal{G}_\infty$ lauten daher vermöge (240) und (235):

$$\boxed{\mathcal{G}_\infty(\varrho, \sigma, \pi): \quad U_\varrho = \sigma U, \quad U_{1\varrho} = (\varrho_1 + 2\sigma)\, U_1 + \pi U.} \tag{243}$$

Für π haben wir dabei die Relation

$$\boxed{\pi_\varrho = -\sigma\pi + 2\sigma_{1\varrho} - \sigma_{\varrho 1} - \varrho_1 \sigma_1.} \tag{244}$$

(244) ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß bei gegebenen Größen ϱ, σ, X, π die Diffgl.n (218a), (238) und (241) für P ohne Widerspruch bestehen können. Setzen wir für den Augenblick $P_\varrho = z$, so lassen sich (238) und (241) so schreiben

$$z_\varrho = -(\varrho_1 + 2\sigma) z, \qquad z_{1\varrho} = -\sigma z_1 - (\pi + \varrho_{11} + 2\sigma_1) z; \tag{245}$$

rechnen wir die Identität (189b) für $f = z$ vermöge (245) aus, so gelangen wir wegen (226) nach Abspaltung des Faktors z zu der Beziehung (244). Nach Satz 19 existieren daher ∞^∞ Lösungen z von (245). Es bleibt dann nur noch die Frage zu klären, ob die Gleichungen $P_\varrho = z$ und (218a), d. h. die Gleichungen

$$P_\varrho = z, \quad P_{1\varrho} = (\varrho_1 + \sigma)\, P_1 + 2z_1 + \frac{X_{11}}{X_1} z \tag{246}$$

miteinander verträglich sind, wenn z eine Lösung von (245) bedeutet. Diese Frage ist auf Grund des Satzes 19 zu bejahen, da die Identität (189b) für $f = P$ vermöge (246),

(245), (225), (226) und (242) erfüllt ist. Durch (246) werden also ∞^∞ Funktionen P bestimmt.

Die Transformation der Gleichungen (234) geht jetzt sehr einfach vonstatten, wenn wir die Formel

$$\mathfrak{U}_{\mathrm{I\,III}} = \frac{1}{X_1}\mathfrak{U}_{\mathrm{III\,1}} - \frac{P_1}{X_1}\mathfrak{U}_{\mathrm{III\,II}} \tag{247}$$

berücksichtigen. Aus $\mathfrak{U}_{\mathrm{II}} = 0$ folgt nämlich $\mathfrak{U}_{\mathrm{III\,II}} = 0$, so daß die transformierten Gleichungen (234) wegen (247) und (240) lauten:

$$\boxed{\mathcal{G}_{\alpha+1}(\varrho, \sigma, \pi)\colon \qquad U_\varrho = \sigma U, \quad U_{1\varrho 1} = ((\varrho_1 + 2\sigma)\, U_1 + \pi U)_1.} \tag{248}$$

Die Gruppe (243) *ist natürlich die Derivierte der Gruppe* (248).

3. Die Defgl.n (76) der speziellen $\mathcal{G}_{n+1}$ (11) lassen sich bei Einführung der ch. Fu. $\mathfrak{U}$ so darstellen

$$\begin{aligned} &\text{(a)} && \mathfrak{U}_{\mathrm{II}} = 0, \quad \mathfrak{U}_{\mathrm{III}} = 0, \\ &\text{(b)} && \mathfrak{U}_{1^n} = \mathfrak{a}_{n-1)}\mathfrak{U}_{1^{n-1}} + \cdots + \mathfrak{a}_{1)}\mathfrak{U}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{a}_{0)}\mathfrak{U} - (\mathfrak{a}_{1)}\mathfrak{y}' + \mathfrak{a}_{0)}\mathfrak{y})\mathfrak{U}_{\mathrm{III}}. \end{aligned} \tag{249}$$

Diese Defgl.n unterwerfen wir der allgemeinsten B. T. (161), wozu wir eine Formel für die Op.n $\mathfrak{U}_{1^{s+1}}$ benötigen. Unter der Voraussetzung

$$\mathfrak{U}_{\mathrm{III}} = \mathfrak{U}_{\mathrm{I\,III}} = 0, \quad \mathfrak{U}_{\mathrm{II\,III}} = \mathfrak{U}_{\mathrm{I\,III\,II}} = 0 \tag{250}$$

folgen nämlich aus (215) mit Benutzung der Bezeichnung

$$Zf = \frac{1}{X_1} f_1, \tag{251}$$

da vermöge (250) sämtliche Op.n 3. und höherer Stufe von $\mathfrak{U}$ bezüglich ∂_{I}, ∂_{II} verschwinden, in denen wenigstens einmal der Index II auftritt, die Gleichungen

$$\mathfrak{U}_{1^{s+1}} = \mathfrak{U}_{1^s\,\mathrm{I}} = Z\mathfrak{U}_{1^s} = Z^2\mathfrak{U}_{1^{s-1}} = \cdots = Z^{s-1}\mathfrak{U}_{\mathrm{II}} \qquad (s = 1, 2, \ldots).$$

Aus diesen Gleichungen findet man wegen $\mathfrak{U}_{\mathrm{III\,I}} = 0$ (s. (247)):

$$\mathfrak{U}_{1^{s+1}} = Z^s\mathfrak{U}_{\mathrm{I}} - (Z^s P)\mathfrak{U}_{\mathrm{I\,III}} \qquad (s = 1, 2, \ldots). \tag{252}$$

Wenn $\mathfrak{U}_{\mathrm{II}} = 0$, dann ist $\mathfrak{U}_{\mathrm{I}} = Z\mathfrak{U}$ und (252) liefert vermöge (179) und (240):

$$\mathfrak{U}_{1^{s+1}} = Z^{s+1}(\Delta U) - (Z^s P)(U_{1\varrho} - (\varrho_1 + 2\sigma)\, U_1 - \pi U) \quad (s = 1, 2, \ldots). \tag{253}$$

Mit Rücksicht auf (253), (237), (240), (179) erhalten wir demnach durch Transformation der Defgl.n (249), da (249a) in (248) übergeht, als System von Defgl.n der allgemeinsten $\mathcal{G}_{n+1}$ von B. T.n

$$\boxed{\mathcal{G}_{n+1}(\varrho, \sigma)\colon \quad \begin{aligned} &\text{(a)} && U_\varrho = \sigma U, \quad U_{1\varrho 1} = ((\varrho_1 + 2\sigma)\, U_1 + \pi U)_1, \\ &\text{(b)} && U_{1^n} = \alpha_{n-1)}U_{1^{n-1}} + \cdots + \alpha_{1)}U_1 + \alpha_{0)}U + \beta U_{1\varrho}. \end{aligned}} \tag{254}$$

Wir können beweisen, daß jedes System (254) eine $\mathcal{G}_{n+1}$ definiert, wenn die Koeffizienten von (254b) die Int. Bed.n befriedigen, welche sich aus der Forderung ergeben, daß die $n + 1$ Op.n

$$U_{1\varrho},\ U,\ U_1,\ U_{11},\ \ldots,\ U_{1^{n-1}}, \tag{254'}$$

durch die vermöge (254) sämtliche Op.n n-ter und höherer Stufe von U ausdrückbar sind, unabhängig bleiben. Denn angenommen, diese Int. Bed.n sowie die Relationen (226), (244) sind erfüllt. Dann ist auch das System

$$(255)\qquad \begin{aligned} &(a)\quad \mathfrak{U}_{\mathrm{II}} = 0, \quad \mathfrak{U}_{\mathrm{III}} = 0, \\ &(b)\quad \mathfrak{U}_{\mathfrak{I}^n} = \mathfrak{a}_{n-1)}\mathfrak{U}_{\mathfrak{I}^{n-1}} + \cdots + \mathfrak{a}_{1)}\mathfrak{U}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{a}_{0)}\mathfrak{U} + \mathfrak{b}\mathfrak{U}_{\mathrm{III}} \end{aligned}$$

integrabel, in welches wir das System (254) wegen (226), (244) mittels (253) jederzeit transformieren können; willkürlich bleiben in (255) die $n+1$ Op.n

$$(255')\qquad \mathfrak{U}_{\mathrm{III}}, \mathfrak{U}, \mathfrak{U}_{\mathrm{I}}, \mathfrak{U}_{\mathrm{II}}, \ldots, \mathfrak{U}_{\mathfrak{I}^{n-1}}.$$

Die Int. Bed.n zu (255) ergeben sich nach Theorem 3 offenbar aus den beiden Forderungen $\mathfrak{U}_{\mathfrak{I}^n\,\mathrm{II}} = 0$ und $\mathfrak{U}_{\mathfrak{I}^{n+1}\,\mathrm{II}} = 0$, und zwar bekommen wir:

$$(256)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{a}_{n-1)\mathrm{II}} = \cdots = \mathfrak{a}_{1)\mathrm{II}} = \mathfrak{a}_{0)\mathrm{II}} = 0, \qquad \mathfrak{a}_{1)} + \mathfrak{b}_{\mathrm{II}} = 0, \\ &\mathfrak{a}_{n-1)\mathrm{III}} = \cdots = \mathfrak{a}_{1)\mathrm{III}} = \mathfrak{a}_{0)\mathrm{III}} = 0, \qquad \mathfrak{a}_{0)} + \mathfrak{a}_{1)\mathrm{I}} + \mathfrak{b}_{\mathrm{III}} = 0. \end{aligned}$$

Diese Relationen sind gleichbedeutend mit

$$(256')\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{a}_{n-1)} = \mathfrak{a}_{n-1)}(\mathfrak{x}), \ldots, \mathfrak{a}_{1)} = \mathfrak{a}_{1)}(\mathfrak{x}), \quad \mathfrak{a}_{0)} = \mathfrak{a}_{0)}(\mathfrak{x}), \\ &\mathfrak{b} = -\mathfrak{a}_{1)}\mathfrak{y}' - \mathfrak{a}_{0)}\mathfrak{y} + \mathfrak{b}_{0)}(\mathfrak{x}). \end{aligned}$$

Die allgemeinste Lösung von (255) läßt sich daher linear zusammensetzen aus folgenden $n+1$ Lösungen

$$(257)\qquad \mathfrak{Y}_{1)}(\mathfrak{x}), \ldots, \mathfrak{Y}_{n)}(\mathfrak{x}), \quad \mathfrak{y} + \mathfrak{g}(\mathfrak{x}),$$

wo die $\mathfrak{Y}_{i)}$ n linear unabhängige Lösungen der Diffgl.

$$(257')\qquad \mathfrak{y}^{(n)} - \mathfrak{a}_{n-1)}(\mathfrak{x})\mathfrak{y}^{(n-1)} - \cdots - \mathfrak{a}_{0)}(\mathfrak{x})\mathfrak{y} = 0,$$

$\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ irgendeine Lösung der Diffgl.

$$(257'')\qquad \mathfrak{y}^{(n)} - \mathfrak{a}_{n-1)}(\mathfrak{x})\mathfrak{y}^{(n-1)} - \cdots - \mathfrak{a}_{0)}(\mathfrak{x})\mathfrak{y} = \mathfrak{b}_{0)}(\mathfrak{x})$$

bedeuten. *Die inf. Trf.n* (257) *nun erzeugen eine* $\mathcal{G}_{n+1}$, *folglich auch die durch das ursprüngliche System* (254) *bestimmten inf. Trf.n.*

Über die Int. Bed.n zu (254) läßt sich noch folgendes sagen. Vermöge (254) können alle Op.n n-ter und höherer Stufe von U durch die Op.n (254′) ausgedrückt werden, so daß auf Grund von Theorem 3 die Relationen erster bis $(n+2)$-ter Stufe, wie sie aus (254) folgen, durch Verknüpfung mit den ∂-Relationen und durch Gleichsetzung der Koeffizienten der Op.n (254′) die Int. Bed.n liefern. Nun ist es vermöge (254a) möglich, sämtliche Op.n von U, von deren Indizes wenigstens einer gleich ϱ ist, folgendermaßen auszudrücken:

$$(258)\qquad U_{i_1\ldots i_{s+1}} = w_{i_1\ldots i_{s+1})}(U_{1\varrho}, U, U_1, \ldots, U_{1^s})$$
$$(i_1, \ldots, i_{s+1} = 1, \varrho, \text{ nicht alle} = 1;\ s = 0, 1, 2, \ldots).$$

Diese w-Relationen ziehen die ∂-Relationen nach sich, denn die Gleichungen (254a) oder (248) definieren ja die allgemeinste $\mathcal{G}_{\infty+1}$. Es kommt also nur noch darauf an, daß die Relationen (258) bei Hinzunahme von (254b) lauter Identitäten zwischen den Op.n (254′) liefern. Dazu genügt es offenbar, daß die w-Relationen

$$(258')\qquad U_{1^s\varrho} = w_{1^s\varrho)}(U_{1\varrho}, U, U_1, \ldots, U_{1^s}) \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

für $s = n$ und $s = n+1$ vermöge (254) zu Identitäten werden. Die explizite Form der Relationen (258′) läßt sich leicht bestimmen. Die Beziehung (258′) ist ja — vgl. die Relationen (197) — vermöge der übrigen w-Relationen (258) 1. bis $(s+1)$-ter Stufe äquivalent mit der Identität

$$(259)\qquad \mathfrak{D}_1 f_{1^{s-2}} = f_{1^s\varrho} + f_{1^{s-2}\varrho 11} - 2f_{1^{s-1}\varrho 1} + \varrho_{11} f_{1^{s-1}} = 0$$

für $f = U$. Diese Identität läßt sich vermittels der übrigen ∂-Relationen 3. bis $(s+1)$-ter Stufe umformen zu

$$(259') \qquad f_{1^s\varrho} = sf_{1\varrho 1^{s-1}} - (s-1)f_{\varrho 1^s} - \sum_{i=1}^{s-1} i\binom{s}{i+1}\varrho_{1^{i+1}}f_{1^{s-i}} \qquad (s = 2, 3, \ldots).$$

Die für $s = 2$ richtige Formel (259′) bestätigt man durch den Schluß von s auf $s+1$, indem man f durch f_1 ersetzt. Für $f = U$ ergibt sich aus (259′) vermöge (254a):

$$(260) \quad U_{1^s\varrho} = \sum_{i=0}^{s}\left(i\binom{s}{i}\pi_{1^i 1^{-1}} + \binom{s}{i+1}\varrho_{1^{i+1}} + (s-2i+1)\binom{s}{i}\sigma_{1^i}\right)U_{1^{s-i}} \quad (s = 2, 3, \ldots).$$

Damit haben wir die gesuchte explizite Form für die Relationen (258′) gefunden, und wir können den Satz aussprechen:

Satz 31. *Die allgemeinste $\mathcal{G}_{n+1}$ von B. T.n wird durch das System* (254) *mit den Relationen* (226), (244) *definiert, wenn seine Koeffizienten außerdem noch die Relationen befriedigen, welche durch die Forderung geliefert werden, daß die Relationen* (260) *für $s = n$ und $s = n+1$ vermöge* (254) *zu Identitäten werden.*

Die Derivierte der $\mathcal{G}_{n+1}$ (254) ist deren Durchschnitt mit der $\mathcal{G}_\infty$ (243); ihre Defgl.n bestehen daher aus den Gleichungen (254) + (243) und lauten demnach

$$(261) \quad \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{G}_n(\varrho,\sigma): & \text{(a)} \quad U_\varrho = \sigma U, \quad U_{1\varrho} = (\varrho_1 + 2\sigma)U_1 + \pi U, \\ & \text{(b)} \quad U_{1^n} = \alpha_{n-1)}U_{1^{n-1}} + \cdots + (\alpha_{1)} + (\varrho_1 + 2\sigma)\beta)U_1 + (\alpha_{0)} + \pi\beta)U. \end{array}}$$

4. Unsere weitere Aufgabe besteht darin, die allgemeinste $\mathcal{G}^1_{n+1}$ von B. T.n zu charakterisieren; zu diesem Zweck stellen wir zuvor wieder die Defgl.n der unendlichen Gruppen $\mathcal{G}^1$, $\mathcal{G}^1_\infty$, $\mathcal{G}^1_{\infty+1}$ auf, die aus den Gruppen (96), (101), (97) oder

$$(262) \qquad \mathfrak{y}', \quad \mathfrak{F}(\mathfrak{x},\mathfrak{y}); \qquad \mathfrak{U}_{\mathrm{II\,II}} = 0, \quad \mathfrak{U}_{\mathrm{II\,I}} = 0;$$

$$(263) \qquad \mathfrak{y}', \quad \mathfrak{Q}(\mathfrak{x}); \qquad \mathfrak{U}_{\mathrm{II\,II}} = 0, \quad \mathfrak{U}_{\mathrm{II\,I}} = 0, \quad \mathfrak{U}_{\mathrm{I\,II}} = 0;$$

$$(264) \qquad \mathfrak{y}', \quad \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{Q}(\mathfrak{x}); \qquad \mathfrak{U}_{\mathrm{II\,II}} = 0, \quad \mathfrak{U}_{\mathrm{II\,I}} = 0, \quad \mathfrak{U}_{\mathrm{I\,II\,I}} = 0$$

durch Ausübung der allgemeinsten B. T. (161) entstehen. Wegen $\mathfrak{U}_{\mathrm{II\,II}} = 0$ wird vermöge (215) und (222)

$$(265) \qquad \mathfrak{U}_{\mathrm{II\,I}} = \frac{1}{X_1}\mathfrak{U}_{\mathrm{II\,1}} = U_{\varrho 1} - \tau U_\varrho - \sigma U_1 - (\sigma_1 - \sigma\tau)U,$$

$$(265') \qquad \tau = -\frac{X_{11}}{X_1}.$$

Wir bekommen somit durch Transformation von (262) auf Grund von (223) und (265) die Defgl.n

$$(266) \qquad \boxed{\mathcal{G}^1(\varrho,\sigma,\tau): \quad U_{\varrho\varrho} = -\varrho_1 U_\varrho + \varrho_3 U, \quad U_{\varrho 1} = \tau U_\varrho + \sigma U_1 + (\sigma_1 - \sigma\tau)U.}$$

Für τ haben wir dabei die beiden Diffgl.n

$$(267) \qquad \boxed{\tau_\varrho = (\varrho_1+\sigma)\,\tau - \varrho_{11} - 2\sigma_1, \quad \tau_{1\varrho} = 2(\varrho_1+\sigma)\tau_1 + (\varrho_{11}+2\sigma_1)\,\tau - \varrho_{111} - 3\sigma_{11},}$$

die sich aus der Forderung ergeben, daß die Diffgl.n (225), (265′) für X, also die Diffgl.n

$$(268) \qquad X_\varrho = 0, \quad X_{1\varrho} = (\varrho_1 + \sigma)X_1, \quad X_{11} = -\tau X_1$$

miteinander verträglich sein müssen. Rechnet man die Identitäten (259′) für $f = X$ und $s = 2, 3$ aus, so erhält man durch Abspaltung des Faktors X_1 die Beziehungen (267) und diese sind zusammen mit (226) nach Satz 20 und Theorem 3 auch hinreichend, damit die Diffgl.n (268) ∞^2 Lösungen X besitzen.

Zur Transformation der Gruppe (263) bedienen wir uns der Formel (240), die wir mittels (215) und (218a) wegen $\mathfrak{U}_{\mathrm{II\,II}} = 0$ in die Form bringen können

$$\mathfrak{U}_{\mathrm{I\,II}} = U_{1\varrho} - (\varrho_1 + 2\sigma)U_1 - \pi U - \frac{1}{X_1}\tau'\mathfrak{U}_{\mathrm{II}}, \tag{269}$$

$$\tau' = \frac{P_{\varrho 1}}{P_\varrho}. \tag{269′}$$

Die Defgl.n der transformierten Gruppe (263) sehen also wegen (222) so aus:

$$\mathcal{G}^1_\infty(\varrho, \sigma, \pi, \tau, \tau'): \quad \begin{aligned} U_{\varrho\varrho} &= -\varrho_1 U_\varrho + \varrho_3 U, \quad U_{\varrho 1} = \tau U_\varrho + \sigma U_1 + (\sigma_1 - \sigma\tau)U, \\ U_{1\varrho} &= \tau' U_\varrho + (\varrho_1 + 2\sigma)\, U_1 + (\pi - \sigma\tau')U. \end{aligned} \tag{270}$$

τ' muß die beiden Relationen befriedigen

$$\begin{aligned} \tau'_\varrho &= (\varrho_1 + \sigma)\,\tau' - \pi - \varrho_{11} - 2\sigma_1, \\ \tau'_{1\varrho} &= 2(\varrho_1 + \sigma)\,\tau'_1 + (\varrho_{11} + 2\sigma_1)\,\tau' - 2\pi_1 - \varrho_{111} - 2\sigma_{11}, \end{aligned} \tag{271}$$

zu denen wir folgendermaßen gelangen. Sind die Größen $\varrho, \sigma, \tau, X, \pi, \tau'$ mit den Relationen (226), (267), (268), (244) gegeben, dann muß P noch den Diffgl.n (246), (245), (269′) genügen. Die Diffgl. (269′) kann man so schreiben

$$z_1 = \tau' z; \tag{272}$$

rechnet man $z_{1\varrho}$ aus (272) und der ersten Gleichung (245) aus, und vergleicht man den so erhaltenen Ausdruck mit dem Ausdruck in (245) für $z_{1\varrho}$, dann folgt nach Abspaltung des Faktors z die erste Relation (271). Folglich darf (245) + (272) ersetzt werden durch

$$z_\varrho = -(\varrho_1 + 2\sigma)\, z, \qquad z_1 = \tau' z. \tag{272′}$$

Ausrechnen der Identität (189a) für $f = z$ vermittels (272′) liefert dann die zweite Relation (271), während (189b) nichts Neues ergibt. Die Diffgl.n (272′) bestimmen somit nach Theorem 3 ∞^1 Lösungen z, so daß für P die Diffgl.n (246) übrig bleiben. Diese sind wegen (272′) miteinander verträglich, denn es wurde ja früher festgestellt, daß sie schon auf Grund von (245) verträglich sind. Es gibt daher ∞^∞ Funktionen P, wenn $\varrho, \sigma, \tau, X, \pi, \tau'$ gegeben sind.

Jetzt können wir die Gruppe (264) transformieren, und zwar wiederum durch Verwendung von (247), da $\mathfrak{U}_{\mathrm{I\,II\,II}} = 0$; in Verbindung mit (269) und bei Beachtung von $\mathfrak{U}_{\mathrm{II\,1}} = 0$ sowie mit Rücksicht auf (222) und (265′) bekommen wir dann die folgenden Defgl.n:

$$\boxed{\mathcal{G}^1_{\infty+1}(\varrho, \sigma, \pi, \tau, \varkappa): \quad \begin{aligned} U_{\varrho\varrho} &= -\varrho_1 U_\varrho + \varrho_3 U, \quad U_{\varrho 1} = \tau U_\varrho + \sigma U_1 + (\sigma_1 - \sigma\tau)U, \\ U_{1\varrho 1} &= (\varrho_1 + 2\sigma)U_{11} + \varkappa U_\varrho + (\pi + \varrho_{11} + 2\sigma_1)U_1 + (\pi_1 - \sigma\varkappa)U \end{aligned}} \tag{273}$$

$$\varkappa = \tau'_1 + \tau\tau'. \tag{273′}$$

Nach den Ausführungen in § 2, 7 stecken in der Gruppe (273) ∞^1 Untergruppen vom Typ $\mathcal{G}^1_\infty$, welche durch Transformation aus den Gruppen (105) oder

$$\mathfrak{y}' - c\mathfrak{y},\ \Omega(\mathfrak{x}); \quad \mathfrak{U}_{\mathrm{II\,II}} = 0,\ \mathfrak{U}_{\mathrm{II\,1}} = 0,\ \mathfrak{U}_{\mathrm{I\,II}} = -c\mathfrak{U}_{\mathrm{II}} \tag{274}$$

hervorgehen und demnach durch die Gleichungen (270) definiert werden, worin nach (269), (269′) τ' jetzt den Wert

$$\tau' = \frac{P_{\varrho 1}}{P_\varrho} - cX_1 \tag{275}$$

besitzt. Die Gruppe (270) ist dann und nur dann Untergruppe zu (273), wenn die Beziehung (273′) gilt. Es muß also möglich sein, aus (273′) und (271) ∞^1 Größen τ' zu bestimmen. Diese Forderung zieht für $\varkappa$ die beiden leicht zu findenden Relationen nach sich:

$$\boxed{\begin{aligned} \varkappa_\varrho &= 2(\varrho_1 + \sigma)\varkappa - (\pi + \varrho_{11} + 2\sigma_1)\tau - 2\pi_1 - \varrho_{111} - 2\sigma_{11}, \\ \varkappa_{1\varrho} &= 3(\varrho_1 + \sigma)\varkappa_1 + 2(\varrho_{11} + 2\sigma_1)\varkappa - (\pi + \varrho_{11} + 2\sigma_1)\tau_1 \\ &\quad - (2\pi_1 + \varrho_{111} + 2\sigma_{11})\tau - 3\pi_{11} - \varrho_{1111} - 2\sigma_{111}. \end{aligned}} \tag{276}$$

Die Relationen (276) sind natürlich auch *hinreichend*, damit (273) die allgemeinste $\mathcal{G}^1_{\alpha+1}$ definiert (die Beziehungen (226), (244), (267) als erfüllt vorausgesetzt).

Wir bemerken noch, daß die Derivierte der Gruppe (273) *wieder die Gruppe* (243) *ist.*

5. Das System (95) läßt sich mittels der ch. Fu. $\mathfrak{U}$ so schreiben:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \mathfrak{U}_{\text{II II}} = 0, \quad \mathfrak{U}_{\text{III}} = 0, \qquad \text{(b)} \quad \mathfrak{U}_{\text{I III}} = 0, \\ &\text{(c)} \quad \mathfrak{U}_{1^n} = \hat{c}_{n-1)}\mathfrak{U}_{1^{n-1}} + \cdots + \hat{c}_{1)}\mathfrak{U}_1 + \hat{c}_{0)}\mathfrak{U} - (\hat{c}_{1)}\mathfrak{y}' + \hat{c}_{0)}\mathfrak{y})\mathfrak{U}_{\text{I II}} - \hat{c}_{0)}\mathfrak{y}'\mathfrak{U}_{\text{II}}. \end{aligned} \tag{277}$$

Zur Transformation dieses Systems verwenden wir wieder die Formel (252), welche wegen $\mathfrak{U}_{\text{II}} = 0$ vermöge (215) und (179) mit Rücksicht auf (222) und (269) liefert:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_{\text{I}^{s+1}} &= Z^{s+1}(\Delta U) + ((Z^s P)\tau' - (Z^{s+1}P)X_1)(U_\varrho - \sigma U) \\ &\quad - (Z^s P)(U_{1\varrho} - (\varrho_1 + 2\sigma)U_1 - \pi U) \qquad (s = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{278}$$

Nehmen wir an, daß die invariante $\mathcal{G}_{n+1}$ der $\mathcal{G}^1_{n+1}$ (277) durch die B. T. (161) in die Gruppe (254) übergeht, dann verwandelt sich das System (277) offenbar in dieses

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{(a)} \quad U_{\varrho\varrho} = -\varrho_1 U_\varrho + \varrho_3 U, \quad U_{\varrho 1} = \tau U_\varrho + \sigma U_1 + (\sigma_1 - \sigma\tau)U, \\ \mathcal{G}^1_{n+1}(\varrho, \sigma)\text{:} \quad &\text{(b)} \quad U_{1\varrho 1} = (\varrho_1 + 2\sigma)U_{11} + \varkappa U_\varrho + (\pi + \varrho_{11} + 2\sigma_1)U_1 + (\pi_1 - \sigma\varkappa)U, \\ &\text{(c)} \quad U_{1^n} = \alpha_{n-1)}U_{1^{n-1}} + \cdots + \alpha_{1)}U_1 + \vartheta U_\varrho + (\alpha_{0)} - \sigma\vartheta)U + \beta U_{1\varrho}. \end{aligned}} \tag{279}$$

Willkürlich bleiben vermöge (279) die Op.n (254′) und U_ϱ. Das System (279) reduziert sich vermöge $U_\varrho = \sigma U$ auf das System (254), wie es sein muß; die invariante $\mathcal{G}_{n+1}(\varrho, \sigma)$ einer $\mathcal{G}^1_{n+1}(\varrho, \sigma)$ ist ja die Durchschnittsgruppe der $\mathcal{G}^1_{n+1}(\varrho, \sigma)$ mit der Gruppe $\mathcal{G}(\varrho, \sigma)$. *Die Derivierte der* $\mathcal{G}^1_{n+1}$ (279) *ist wieder die* $\mathcal{G}_n$ (261).

Wir zeigen jetzt, daß das System (279) die allgemeinste $\mathcal{G}^1_{n+1}$ definiert, sobald außer den in Satz 31 genannten Koeffizientenbedingungen und den Relationen (267), (276) noch die *Gruppen-Bed.n* zu (279) erfüllt sind. Diese Gr.Bed.n ergeben sich ver- vermöge (279) durch Einsetzen der Größe $W = \{UV\}$ in die Gleichung (261b); die Gleichungen (261a) bestehen ja für W bereits auf Grund von (279a, b) (s. Schlußbemerkung der vorhergehenden Ziffer **4**). Um unsere Behauptung zu beweisen, transformieren wir die Gleichungen (279a, b) in (264), wodurch bei Beachtung von (278) das System (279) übergeht in

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \mathfrak{U}_{\text{II II}} = 0, \quad \mathfrak{U}_{\text{III}} = 0, \qquad \text{(b)} \quad \mathfrak{U}_{\text{I III}} = 0, \\ &\text{(c)} \quad \mathfrak{U}_{1^n} = \mathfrak{a}_{n-1)}\mathfrak{U}_{1^{n-1}} + \cdots + \mathfrak{a}_{1)}\mathfrak{U}_{\text{I}} + \mathfrak{a}_{0)}\mathfrak{U} + \hat{\vartheta}\mathfrak{U}_{\text{II}} + \mathfrak{b}\mathfrak{U}_{\text{I II}}, \end{aligned} \tag{280}$$

während sich das System (254) in das System (255) mit den Relationen (256) oder (256′) verwandelt; denn da (254) gleichbedeutend ist mit (279) + (236), muß das transformierte System (254) gleichbedeutend sein mit (280) + (233), d. i. (255). Die Derivierte (261) von (254) wird übergeführt in die Derivierte von (255), d. h. in

$$(281)\qquad \begin{array}{ll}(a) & \mathfrak{U}_{II}=0,\quad \mathfrak{U}_{I\,II}=0,\\ (b) & \mathfrak{U}_{I^n}=\mathfrak{a}_{n-1)}\mathfrak{U}_{I^{n-1}}+\cdots+\mathfrak{a}_{1)}\mathfrak{U}_{I}+\mathfrak{a}_{0)}\mathfrak{U}.\end{array}$$

Nun ist es ohne weiteres klar, daß die Größe $\mathfrak{W}=\{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\}$ das System (281) vermöge (280) befriedigt, wenn die Größe $W=\{UV\}$ dem System (261) vermöge (279) Genüge leistet. Nach (171) erhalten wir auf Grund von (280a, b) die Formeln

$$(282)\qquad \mathfrak{W}=(II,I)-(0^*,I\,II),\quad \mathfrak{W}_{1^i}=(II,I^{i+1})-(I^i,I\,II)\qquad (i=1,2,\ldots),$$

wobei wir 0* statt 0 schreiben, um auszudrücken, daß in den Klammersymbolen die ch. Fu.n $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ und nicht U, V stehen. Einsetzen von $\mathfrak{W}$ in (281b) liefert mit Rücksicht auf (282) und (280) die Beziehungen:

$$(283)\qquad \mathfrak{a}_{n-1)I}=\cdots=\mathfrak{a}_{1)I}=\mathfrak{a}_{0)I}=0,\qquad \hat{\vartheta}=\mathfrak{b}_I.$$

Verknüpfen wir (283) mit (256′), so kommt

$$(284)\qquad \mathfrak{a}_{n-1)}=c_{n-1)},\ \ldots,\ \mathfrak{a}_{1)}=c_{1)},\ \ \mathfrak{a}_{0)}=c_{0)},\qquad \mathfrak{b}=-c_{1)}\mathfrak{y}'-c_{0)}\mathfrak{y}+\mathfrak{b}_{0)}(\mathfrak{x}),$$
$$\hat{\vartheta}=-c_{0)}\mathfrak{y}'+\mathfrak{b}'_{0)};$$

aus (284) schließen wir, daß sich die allgemeinste Lösung von (280) linear zusammensetzt aus den $n+2$ Lösungen

$$(285)\qquad \mathfrak{Y}_{1)}(\mathfrak{x}),\ \ldots,\ \mathfrak{Y}_{n)}(\mathfrak{x}),\ \ \mathfrak{y}+\mathfrak{g}(\mathfrak{x}),\ \ \mathfrak{y}'+\mathfrak{g}'(\mathfrak{x}),$$

wo die $\mathfrak{Y}_{j)}$ n linear unabhängige Lösungen der Diffgl.

$$(285')\qquad \mathfrak{y}^{(n)}-c_{n-1)}\mathfrak{y}^{(n-1)}-\cdots-c_{0)}\mathfrak{y}=0$$

und $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ irgendeine Lösung der Diffgl.

$$(285'')\qquad \mathfrak{y}^{(n)}-c_{n-1)}\mathfrak{y}^{(n-1)}-\cdots-c_{0)}\mathfrak{y}=\mathfrak{b}_{0)}(\mathfrak{x})$$

bedeuten. Die inf. Trf.n (285) erzeugen nun immer eine $\mathcal{G}^1_{n+1}$, womit unsere Behauptung als richtig erwiesen ist.

Für die Berechnung der Gr. Bed.n zu (279) können wir eine allgemeine Formel angeben. Nach (179) ist nämlich auch

$$(286)\qquad \mathfrak{W}=\Delta W.$$

Daraus folgt wegen (282) mit Rücksicht auf (215) und (179)

$$(286')\qquad W=\frac{1}{X_1\Delta}(II,1^*)-(0,I\,II),$$

wobei die Schreibweise 1* denselben Zweck hat wie die Schreibweise 0* in (282), während im zweiten Klammersymbol von (286′) die Ziffer 0 sich auf die ch. Fu.n U, V bezieht. Aus (286′) erhalten wir schließlich mit Benutzung von (179), (214c), (265′), (269′)

$$(287)\qquad W=\frac{1}{X_1}(II,1)+\frac{1}{X_1}(\tau'-\tau)(II,0)-(0,I\,II).$$

Wegen $\mathfrak{U}_{II\,1}=0$, $\mathfrak{U}_{I\,II\,1}=0$ finden wir aus (287):

$$(288)\quad W_{1^s}=\frac{1}{X_1}(II,1^{s+1})+\sum_{i=0}^{s}\left(\binom{s}{i+1}\left(\frac{1}{X_1}\right)_{1^{i+1}}+\binom{s}{i}\left(\frac{\tau'-\tau}{X_1}\right)_{1^i}\right)(II,1^{s-i})-(1^s,I\,II)$$
$$(s=0,1,2,\ldots).$$

Diese Formel läßt sich weiter umgestalten, wenn wir die Op. einführen

$$(289)\quad f^{[1]} = f_1 + \tau f; \quad f^{[i+1]} = (f^{[i]})_1 + \tau f^{[i]}\ (i = 1, 2, \ldots); \quad f^{[0]} = f;$$

es gilt hierbei die durch Induktion zu bestätigende Beziehung

$$(289')\qquad f^{[s]} = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} 1^{[i]} f_{1^{s-i}} \quad (1^{[0]} = 1,\ 1^{[1]} = \tau,\ 1^{[i+1]} = \tau^{[i]}).$$

Wir erhalten dann aus (288):

$$(290)\quad W_{1^s} = \frac{1}{X_1}(\mathrm{II}, 1^{s+1}) + \frac{1}{X_1}\sum_{i=0}^{s}\left[\binom{s}{i}\tau'^{[i]} + \left(\binom{s}{i+1} - \binom{s}{i}\right)\tau^{[i]}\right](\mathrm{II}, 1^{s-i}) - (1^s, \mathrm{I\,II})$$
$$(s = 0, 1, 2, \ldots).$$

(290) liefert endlich wegen (269), (273′), (222):

$$(290')\quad \begin{cases} W_{1^s} = (\varrho, 1^{s+1}) + \sigma(1^{s+1}, 0) + (s-1)\,\tau(\varrho, 1^s) - (1^s, 1\varrho) \\ \quad + (\varrho_1 + 2\sigma)\,(1^s, 1) + ((s-1)\,\sigma\tau + \pi)\,(1^s, 0) \\ \quad + \sum_{i=1}^{s}\left[\binom{s}{i}\varkappa^{[i-1]} + \left(\binom{s}{i+1} - \binom{s}{i}\right)\tau^{[i]}\right]((\varrho, 1^{s-i}) - \sigma(0, 1^{s-i})) \\ \qquad\qquad (s = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

Ihrer Herleitung zufolge besteht die Formel (290′) auf Grund der Gleichungen (280a, b), oder, w. d. i., (279a, b).

Bezeichnen wir mit $L(U)$ den Ausdruck, den wir erhalten, wenn wir in (261b) alles auf die linke Seite bringen, dann wird wegen (290′) vermöge (279):

$$(291)\quad \begin{aligned} L(W) = \mathsf{A}(\varrho, 1\varrho) + \sum_{i=0}^{n-1}\mathsf{A}_{i)}(\varrho, 1^i) + \mathsf{B}(0, 1\varrho) + \sum_{i=1}^{n-1}\mathsf{B}_{i)}(0, 1^i) \\ + \sum_{i=2}^{n-1}\Gamma_{i)}(1, 1^i) + \sum_{i=1}^{n-1}\Delta_{i)}(1\varrho, 1^i). \end{aligned}$$

Setzen wir in (291) $U_\varrho = \sigma U$, so ergibt sich

$$(291')\quad \begin{aligned} L(W)_{U_\varrho = \sigma U} = (\mathsf{B} + \sigma\mathsf{A})\,(0, 1\varrho) + \sum_{i=1}^{n-1}(\mathsf{B}_{i)} + \sigma\mathsf{A}_{i)})\,(0, 1^i) \\ + \sum_{i=2}^{n-1}\Gamma_{i)}(1, 1^i) + \sum_{i=1}^{n-1}\Delta_{i)}(1\varrho, 1^i). \end{aligned}$$

Der Ausdruck (291′) würde sich auch einstellen, wenn wir $L(W)$ direkt vermöge (254) ausrechnen würden; folglich verschwindet er identisch, wenn die in Satz 31 angegebenen Relationen erfüllt sind. Es ist demnach

$$(292)\quad \begin{aligned} &\mathsf{B} + \sigma\mathsf{A} = 0, \quad \mathsf{B}_{i)} + \sigma\mathsf{A}_{i)} = 0, \quad \Delta_{i)} = 0 && (i = 1, \ldots, n-1), \\ &\Gamma_{i)} = 0 && (i = 2, \ldots, n-1). \end{aligned}$$

Zum identischen Verschwinden des Ausdruckes (291) genügt es daher nach (292), wenn

$$(293)\qquad \mathsf{A} = 0, \quad \mathsf{A}_{i)} = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Für die Aufsuchung der Gr. Bed.n zu (279) wird also nur die Ausrechnung derjenigen Glieder von (291) gefordert, welche die Ausdrücke $(\varrho, 1\varrho)$, $(\varrho, 1^i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ enthalten. Somit haben wir das Ergebnis:

Satz 32. *Die allgemeinste $\mathcal{G}^1_{n+1}$ von B. T.n ist durch das System* (279) *charakterisiert, dessen Koeffizienten die Relationen des Satzes* 31 *sowie die Relationen* (267), (276) *und* (293) *befriedigen.*

Aus Satz 8 schließen wir sodann:

Satz 33. *Das System* (254) *definiert eine* $\mathcal{G}^{\mathrm{I}}_{n+1}$, $\mathcal{G}^{\mathrm{II}}_{n+1}$, $\mathcal{G}^{\mathrm{III}}_{n+1}$, *je nachdem aus* (267), (276), (293) $0, 1, \infty^2$ *Größensysteme* τ, $\varkappa$, ϑ *bestimmt werden können.*

6. Jetzt wenden wir uns der Aufstellung der invarianten $\mathcal{D}_n$ der Gruppe (254) zu. Wir setzen nach (174) und (174′) in bezug auf (254):

$$X^{(n)}f = U_{1\varrho}Cf + UC_0f + U_1C_1f + \cdots + U_{1^{n-1}}C_{n-1}f, \tag{294}$$

$$\begin{aligned} Cf &= \Xi p + \mathsf{H}q + \mathsf{H}'q' + \cdots + \mathsf{H}^{(n)}q^{(n)}, \\ C_if &= \Xi_{i)}p + \mathsf{H}_{i)}q + \mathsf{H}'_{i)}q' + \cdots + \mathsf{H}^{(n)}_{i)}q^{(n)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \end{aligned} \tag{294′}$$

Ferner führen wir die Abkürzung ein

$$y^{(\varrho)} = \varrho y'' + 1, \tag{295}$$

so daß

$$\frac{df}{dx} = f_1 y^{(\varrho)} + f_\varrho y'' \tag{296}$$

wird. (173′) und (166′) liefern dann vermöge $U_\varrho = \sigma U$

$$\begin{aligned} \eta'' = &- y^{(\varrho)2}U_{11} - y^{(\varrho)}y''U_{1\varrho} - (\varrho_\varrho y''^2 + (\varrho_1 + \sigma)y^{(\varrho)}y'')U_1 \\ &- ((\sigma_\varrho + \sigma^2)y''^2 + \sigma_1 y^{(\varrho)}y'')U, \end{aligned} \tag{297}$$

so daß wir bekommen:

$$\begin{array}{llll} \Xi_{0)} = \sigma, & \mathsf{H}_{0)} = y'\sigma - 1, & \mathsf{H}'_{0)} = 0, & \mathsf{H}''_{0)} = * \\ \Xi_{1)} = \varrho, & \mathsf{H}_{1)} = y'\varrho, & \mathsf{H}'_{1)} = -1, & \mathsf{H}''_{1)} = * \\ \Xi = 0, & \mathsf{H} = 0, & \mathsf{H}' = 0, & \mathsf{H}'' = -y^{(\varrho)}y'' \\ \Xi_{2)} = 0, & \mathsf{H}_{2)} = 0, & \mathsf{H}'_{2)} = 0, & \mathsf{H}''_{2)} = -y^{(\varrho)2}. \end{array} \tag{298}$$

Ferner gilt:

$$\Xi_{i)} = \mathsf{H}_{i)} = \mathsf{H}'_{i)} = \cdots = \mathsf{H}^{(i-1)}_{i)} = 0 \qquad (i = 3, \ldots, n-1). \tag{298′}$$

Die Matrix der Symbole (294′) sieht demnach so aus

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} \sigma & y'\sigma - 1 & 0 & \mathsf{H}''_{0)} & \ldots & \ldots & \mathsf{H}^{(n)}_{0)} \\ \varrho & y'\varrho & -1 & \mathsf{H}''_{1)} & \ldots & \ldots & \mathsf{H}^{(n)}_{1)} \\ 0 & 0 & 0 & -y^{(\varrho)}y'' & \ldots & \ldots & \mathsf{H}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & -y^{(\varrho)2} & \ldots & \ldots & \mathsf{H}^{(n)}_{2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{H}'''_{3)} & \ldots & \mathsf{H}^{(n)}_{3)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{H}^{(n-1)}_{n-1)} & \mathsf{H}^{(n)}_{n-1)} \end{array} \right\|. \tag{299}$$

In dieser Matrix, deren Rang gleich $n + 1$ sein muß, da sonst im Widerspruch zu Satz 25 mehr als eine Invariante $I(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ der Gruppe (254) vorhanden wäre, gibt es nur drei von Null verschiedene $(n + 1)$-reihige Determinanten, welche die Werte besitzen

$$(y'\sigma - 1)\, y^{(\varrho)}\Delta_{n)}, \quad \sigma y^{(\varrho)}\Delta_{n)}, \quad -\varrho y^{(\varrho)}\Delta_{n)}, \tag{299′}$$

wobei

$$\Delta_{n)} = \left| \begin{array}{cccc} y'' & \mathsf{H}''' & \ldots & \mathsf{H}^{(n)} \\ y^{(\varrho)} & \mathsf{H}'''_{2)} & \ldots & \mathsf{H}^{(n)}_{2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \mathsf{H}^{(n-1)}_{n-1)} & \mathsf{H}^{(n)}_{n-1)} \end{array} \right|. \tag{300}$$

Die Ausdrücke (299′) können offenbar nur dann verschwinden, wenn $y^{(\varrho)} = 0$ oder $\Delta_{n)} = 0$. Die invariante Diffgl. $y^{(\varrho)} = 0$ ist uns schon bekannt (s. die Ausführungen zu (236)). $\Delta_{n)}$ ist ein Polynom in $y'', \ldots, y^{(n)}$, dessen Koeffizienten ganz rational in den Koeffizienten von (254) und deren Op.n sind. *$y^{(n)}$ kommt in $\Delta_{n)}$ nur linear vor* (daß $\Delta_{n)}$ nicht von $y^{(n)}$ frei sein kann, erkennt man, indem man die Determinante (300) für das spezielle System (249) bildet: sie ist bis auf das Vorzeichen gleich der linken Seite der $\mathcal{D}_n$ (2) der Gruppe (249)). Ist $y^{(\varrho)h_n}$ die höchste Potenz von $y^{(\varrho)}$, die in $\Delta_{n)}$ enthalten ist, dann setzen wir

$$\Delta_{n)} = y^{(\varrho)h_n}\tilde{\Delta}_{n)}. \tag{300'}$$

$\tilde{\Delta}_{n)}$ ist *irreduzibel*; denn würden zwei Polynome in $y'', \ldots, y^{(n)}$ als Faktoren von $\tilde{\Delta}_{n)}$ auftreten, von denen nur eines $y^{(n)}$ enthalten kann, so gäbe es im Widerspruch zu Satz 25 mehr als zwei Diffgl.n von höherer als 1. und niedrigerer als $(n+1)$-ter O., welche die $\mathcal{G}_{n+1}$ (254) gestatten. Daher gilt:

Satz 34. *Die invariante $\mathcal{D}_n$ der $\mathcal{G}_{n+1}$ (254) wird dargestellt durch*

$$\tilde{\Delta}_{n)} = 0. \tag{301}$$

$\tilde{\Delta}_{n)}$ ist ein Polynom in $y'', \ldots, y^{(n)}$, dessen Koeffizienten sich ganz rational aus den Koeffizienten von (254) und ihren Op.n zusammensetzen.

Wenn $\varrho = \infty$, dann versagt die Diffgl. (301) und wir müssen nach einer anderen Form für die $\mathcal{D}_n$ suchen. Zu dem Zweck gestalten wir das System (254) durch Ausübung der Substitution $\mathfrak{S}$ (s. Satz 21) in das äquivalente System um

$$\begin{aligned} U^{\bar{\varrho}} &= \bar{\sigma}U, \quad U_2{}^{\bar{\varrho}}{}_2 = ((\bar{\varrho}_2 + 2\bar{\sigma})\,U_2 + \bar{\pi}U)_2, \\ U_{2^n} &= \bar{\alpha}_{n-1)}U_{2^{n-1}} + \cdots + \bar{\alpha}_{1)}U_2 + \bar{\alpha}_{0)}U + \bar{\beta}U_2{}^{\bar{\varrho}}, \end{aligned} \tag{302}$$

aus dem wir natürlich ebenfalls durch Determinantenbildung die $\mathcal{D}_n$ gewinnen können. Das System (302) unterwerfen wir der zu sich selbst inversen B. T.

$$\mathfrak{x} = y', \quad \mathfrak{y} = xy' - y, \quad \mathfrak{y}' = x \tag{303}$$

$$\Delta = -1, \bar{\Delta} = 1 \tag{303'}$$

$$\partial_{\mathrm{I}} = \partial_2, \quad \partial_{\mathrm{II}} = \partial_1, \quad \partial_{\mathfrak{r}} = \partial^{\bar{\varrho}}, \quad \mathfrak{r} = \bar{\varrho} \quad \text{(s. (205) – (207))}, \tag{304}$$

$$\mathfrak{U} = -U, \tag{305}$$

wodurch wir zu dem System gelangen

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_{\bar{\varrho}} &= \bar{\sigma}\,\mathfrak{U}, \quad \mathfrak{U}_{\mathrm{I}\bar{\varrho}\mathrm{I}} = ((\bar{\varrho}_{\mathrm{I}} + 2\bar{\sigma})\,\mathfrak{U}_{\mathrm{I}} + \bar{\pi}\mathfrak{U})_{\mathrm{I}}, \\ \mathfrak{U}_{\mathrm{I}^n} &= \bar{\alpha}_{n-1)}\mathfrak{U}_{\mathrm{I}^{n-1}} + \cdots + \bar{\alpha}_{1)}\mathfrak{U}_{\mathrm{I}} + \bar{\alpha}_{0)}\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{U}_{\mathrm{I}\bar{\varrho}}. \end{aligned} \tag{306}$$

Ferner wird vermöge (303) wegen (210):

$$\mathfrak{y}'' = \frac{1}{y''}, \quad \mathfrak{y}''' = -\frac{y'''}{y''^3}, \ldots; \quad \mathfrak{y}^{(i)} = K_{i-1)}(y'', \ldots, y^{(i)}) \qquad (i = 2, 3, \ldots), \tag{307}$$

wobei die $K_{j)}$ die in (135), (135′) definierten Funktionen sind, jedoch für die Argumente $y'', \ldots, y^{(j+1)}$ anstatt für die Argumente $y', \ldots, y^{(j)}$ gebildet. Zu dem System (306) bestimmen wir auf dieselbe Weise wie zu (254) die invariante $\mathcal{D}_n$, welche wir so schreiben:

$$\mathfrak{D}_{n)} = 0. \tag{308}$$

Transformieren wir die Diffgl. (308) wieder rückwärts vermöge der B. T. (303), dann erhalten wir die $\mathcal{D}_n$ der $\mathcal{G}_{n+1}$ (302) oder (254); zu diesem Zweck brauchen wir nur in den Koeffizienten des von $\mathfrak{y}'', \ldots, \mathfrak{y}^{(n)}$ abhängigen Polynoms $\mathfrak{D}_{n)}$ die Substitution

$$\begin{pmatrix} \partial_{\mathrm{I}} & \partial_{\mathrm{II}} & \partial_{\bar{\varrho}} \\ \partial_2 & \partial_1 & \partial^{\bar{\varrho}} \end{pmatrix} \tag{308'}$$

vorzunehmen und die $\mathfrak{y}^{(i)}$ $(i = 2, 3, \ldots)$ durch die Ausdrücke (307) zu ersetzen. Nun überlegt man sich leicht, daß die solchermaßen aus $\tilde{\mathfrak{D}}_{n)}$ gewonnene Größe auch dadurch zustandekommt, daß in $\tilde{\Delta}_{n)}$ die Koeffizienten der Substitution $\mathfrak{S}$ unterworfen und die $y^{(i)}$ durch die Funktionen $K_{i-1)}(y'', \ldots, y^{(i)})$ $(i = 2, 3, \ldots)$ ersetzt werden. Der Satz 34 ist demnach zu ergänzen durch den folgenden

Satz 35. *Die Diffgl.* (301) *kann in der Form*

$$(\mathfrak{S}\tilde{\Delta}_{n)})_{y^{(i)} \to K_{i-1)}(y'', \ldots, y^{(i)})} = 0 \tag{309}$$

geschrieben werden, welche dem System (302) *entspricht.*

Für $n > 3$ ist es auf Grund des Satzes 24 möglich, die Koeffizienten von (254) bzgl. (302) aus den Koeffizienten von (301) bzgl. (309) zu bestimmen und so von den Koeffizienten-Relationen für (254) bzgl. (302) zu den Koeffizienten-Relationen für (301) bzgl. (309) zu gelangen.

Eingegangen 22. August 1936.

Struktur der geschlossenen rektifizierbaren Kurven.

Von *Wilhelm Damköhler* in München.

Einleitung. Bei verschiedenen Fragen der Analysis und Variationsrechnung hat man es mit geschlossenen rektifizierbaren Kurven zu tun, und es ist dort häufig erwünscht, genauere Kenntnisse zu besitzen über ihren Aufbau aus einfacheren Bestandteilen. Man wird vermuten, daß sich aus jeder solchen geschlossenen Kurve $\mathfrak{c}$ wenigstens eine *einfach* geschlossene Teilkurve (Komponente) $\mathfrak{c}'$ abspalten wird und daß sich dann ein solcher Absonderungsprozeß wohl auch noch auf die zurückbleibende Restkurve $\mathfrak{c} - \mathfrak{c}'$ wird fortsetzen lassen. Hierbei interessieren nun vornehmlich zwei Fragen:

1. die Anzahl der überhaupt in einer geschlossenen Kurve $\mathfrak{c}$ vorhandenen einfach geschlossenen Komponenten;
2. die genauere Struktur der nach Entfernung aller auf $\mathfrak{c}$ möglichen einfach geschlossenen Teilkurven eventuell übrig bleibenden Restmenge.

Auf sie können ins einzelne gehende Antworten gegeben werden, sobald man die Kurve $\mathfrak{c}$ als rektifizierbar voraussetzt. Das Resultat ist in dem unten stehenden Struktursatz enthalten.

Es sei also die geschlossene rektifizierbare Kurve $\mathfrak{c}$ in einem euklidischen n-dimensionalen Raum E_n durch die Gleichungen

$$x_i = x_i(t), \qquad J = (0 \leqq t \leqq 1)$$

$$x_i(0) = x_i(1) \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{E. 1}$$

gegeben, in welchen t die Bogenlänge der Kurve bedeute. Dann läßt sich ihr Aufbau aus einfacheren Bestandteilen durch folgenden Struktursatz beschreiben:

Struktursatz. *Jede geschlossene rektifizierbare Kurve* $\mathfrak{c}$ *des* E_n *gestattet eine Zerlegung*

$$\mathfrak{c} = \sum_k \mathfrak{g}_k + \sum_l (\mathfrak{J}_{l1} + \mathfrak{J}_{l2}) + \mathfrak{n}$$

in höchstens abzählbar unendlich viele einfach geschlossene Kurven erster und zweiter Art (s. u.) $\{\mathfrak{g}_k\}$, *höchstens abzählbar unendlich viele Paare einfacher Jordanbögen* $\{\mathfrak{J}_{l1}, \mathfrak{J}_{l2}\}$ *und eine Menge* $\mathfrak{n}$ *vom (auf* $\mathfrak{c}$ *gemessenen) Lebesgueschen Maße Null*[1]. *Dabei läßt sich jedes dieser Jordanbögenpaare* $(\mathfrak{J}_{l1}, \mathfrak{J}_{l2})$ *stets so konstruieren, daß der Anfangs- (End-)punkt der einen seiner Teilkurven* $\mathfrak{J}_{l1}$ *mit dem End-(Anfangs-)punkt der anderen* $\mathfrak{J}_{l2}$ *zusammen-*

[1]) Wenn im folgenden von dem Lebesgueschen Maße einer Punktmenge $\mathfrak{A}$ auf der rektifizierbaren Kurve $\mathfrak{c}$ gesprochen wird, so ist darunter immer das (im gewöhnlichen Sinne definierte) Lebesguesche Maß ihres Bildes $\mathfrak{A}_J$ auf dem Parameterintervall $J = (0 \leqq t \leqq 1)$ zu verstehen, welches als untere Grenze der Längen aller aus J-Intervallen hergestellten Umgebungen $\mathfrak{U} > \mathfrak{A}$ definiert ist. Dieses so festgelegte Lebesguesche Maß von $\mathfrak{A} < \mathfrak{c}$ wird durch die ganze Arbeit hindurch in der üblichen Weise mit $\mu\mathfrak{A}$ bezeichnet.

fällt; der Durchschnitt $\mathfrak{J}_{l1} \frown \mathfrak{J}_{l2}$ *ist also nicht leer, und hat, auf beiden Kurven* $\mathfrak{J}_{l1}$ *und* $\mathfrak{J}_{l2}$ *gemessen, dasselbe Lebesguesche Maß, d. h. es gilt immer die Gleichheit*

$$\mu_{l1}(\mathfrak{J}_{l1} \frown \mathfrak{J}_{l2}) = \mu_{l2}(\mathfrak{J}_{l1} \frown \mathfrak{J}_{l2}) , \tag{E. 2}$$

wenn man mit μ_{ls} *die Lebesguesche Maßfunktion auf* $\mathfrak{J}_{ls}$ *bezeichnet. Ist* (E. 2) *von Null verschieden, so berühren* [2]) *sich außerdem noch* $\mathfrak{J}_{l1}$ *und* $\mathfrak{J}_{l2}$ *in einem maßgleichen Kern* [3]) $\mathfrak{M}_l < \mathfrak{J}_{l1} \frown \mathfrak{J}_{l2}$ *gegensinnig.*

Zur Erläuterung und gleichzeitigen Einführung einiger später beim Beweis gebrauchter Begriffe mögen noch folgende Bemerkungen dienen:

a) **Kurventypen** [4]). Wir unterscheiden nach der Art ihrer Darstellung auf dem Parameterintervall $J = (0 \leqq t \leqq 1)$ drei verschiedene Typen geschlossener Teilkurven von $\mathfrak{c}$ als solche erster, zweiter und dritter Art, und gebrauchen die entsprechende Bezeichnung manchmal auch für die Benennung der sie darstellenden Punktmengen auf J.

1. Eine *geschlossene Teilkurve* heißt *von erster Art*, wenn ihre Urbildmenge auf J aus einem einzigen zusammenhängenden Intervall δ besteht; enthält diese insbesondere außer seinen Endpunkten kein weiteres Punktepaar $t_1 \neq t_2$ mehr, das

$$\sum_{i=1}^{n} [x_i(t_1) - x_i(t_2)]^2 = 0$$

erfüllt, so liegt eine *einfach* geschlossene Teilkurve erster Art vor.

2. Eine *geschlossene Teilkurve zweiter Art* hat zur Darstellungspunktmenge auf J die Komplementärmenge einer höchstens abzählbaren Menge getrenntliegender Intervalle $\{\delta_i\}$ erster Art. Ist diese Menge der δ_i insbesondere maximal und vollständig (§ 2), so hat man es mit einer *einfach* geschlossenen Teilkurve zweiter Art zu tun (§ 3).

3. Die *einfach geschlossenen Kurven dritter Art* schließlich stehen in engem Zusammenhang mit den im Struktursatz genannten Paaren einfacher Jordanbögen auf $\mathfrak{c}$. Bedenkt man nämlich, daß die beiden Teilbögen $\mathfrak{J}_{l1}$ und $\mathfrak{J}_{l2}$ eines solchen Paares durch die Punkte ihrer Schnittmenge $\mathfrak{J}_{l1} \frown \mathfrak{J}_{l2}$ in (höchstens abzählbar unendlich viele) getrenntliegende Teilbögen zerschnitten werden, und daß zwischen den so erhaltenen Teilbögen von $\mathfrak{J}_{l1}$ und denen von $\mathfrak{J}_{l2}$ dann dadurch eine paarweise Zusammenfassung hergestellt werden kann, daß man je einem Teilbogen $\mathfrak{c}_1 < \mathfrak{J}_{l1}$ denjenigen Teilbogen $\mathfrak{c}_2 < \mathfrak{J}_{l2}$ zuordnet, der mit $\mathfrak{c}_1$ dieselben Endpunkte auf $\mathfrak{J}_{l1} \frown \mathfrak{J}_{l2}$ gemein hat und — außer er deckt sich völlig mit $\mathfrak{c}_1$ — sonst nur lauter zu $\mathfrak{c}_1$ fremde Punkte enthält, so erkennt man in den Jordanbögenpaaren $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ einen weiteren Typus einfach geschlossener Teilkurven von $\mathfrak{c}$, die wir als Kurven dritter Art bezeichnen wollen.

Bildet man also in jedem der Jordanbögenpaare $(\mathfrak{J}_{l1}, \mathfrak{J}_{l2})$ die darin (in höchstens abzählbar unendlicher Anzahl) enthaltenen einfach geschlossenen Teilkurven dritter Art, so geben sie im Verein mit den im Struktursatz eigens aufgeführten einfach geschlossenen

---

[2]) Das Wort „berühren" will hier keineswegs ein Durchsetzen der beiden Kurven $\mathfrak{J}_{l1}$ und $\mathfrak{J}_{l2}$ ausschließen, sondern nur einen besonderen Nachdruck legen auf das Parallelitätsverhältnis der Tangenten an $\mathfrak{J}_{l1}$ bzw. $\mathfrak{J}_{l2}$ in den Schnittpunkten von $\mathfrak{M}_l$.

[3]) $\mathfrak{M}_l$ ist maßgleicher Kern von $\mathfrak{J}_{l1} \frown \mathfrak{J}_{l2}$, sowohl für die Maßfunktion μ_{l1} als auch für μ_{l2}.

[4]) Die hier gegebene Definition der Kurventypen ist nicht invariant gegenüber der Verschiebung des Ausgangspunktes P der Längenmessung auf der Kurve $\mathfrak{c}$, was vom geometrischen Standpunkt aus vielleicht wünschenswert wäre; wollte man invariante Kurventypen bekommen, so müßte man das Parameterintervall J, d. h. die Parameterstrecke zu einem Kreisbogen, dem Parameterkreis, zusammenbiegen. Entsprechend wäre mit jedem Intervall δ erster Art zu verfahren. Für die Einfachheit und Einheitlichkeit der von uns verwandten Beweismethode scheint es mir aber besser, auf die Invarianz zu verzichten und die im Text gegebenen Definitionen zu benutzen. — Dagegen stellt die aus einfach geschlossenen Kurven 1. und 2. Art gebildete Gesamtheit einen invarianten Begriff dar.

Kurven 1. und 2. Art Antwort auf die erste der oben aufgeworfenen Fragen: Es gibt überhaupt nur abzählbar unendlich viele einfach geschlossene Teilkurven auf c. — Scheidet man sie dann noch zusammen mit den Kurven 1. und 2. Art aus c aus, so wird die Struktur der zurückbleibenden Restmenge durch die Formel (E. 2) und die daran anschließenden Bemerkungen aufgehellt, und damit auch die zweite der obigen Fragen erledigt.

b) **Beweistechnisches.** Ein Ansatz für einen Beweis des Struktursatzes bietet sich nun in dem Umstand dar, daß die Restmenge einer Ausschöpfung des Intervalles J durch getrenntliegende Intervalle δ_k erster Art dann Repräsentant einer einfach geschlossenen Teilkurve (2. Art) von c wird, sobald die Längensumme der Intervalle δ_k der Ausschöpfung einen maximalen Wert erreicht hat (§ 3). Man wird daher vor allem bestrebt sein müssen, eine solche maximale Ausschöpfung von J herzustellen. Selbst für den Fall, daß hierbei die einfach geschlossene Kurve zweiter Art die Länge Null bekommen sollte und damit eigentlich nur einen Punkt auf c darstellte, ist ein solches Vorgehen vorteilhaft; denn es ist iterationsfähig, d. h. es läßt sich auch wieder auf die einzelnen Intervalle δ_k der benutzten Ausschöpfung anwenden. Dadurch gelangen wir aber zu immer kleineren Intervallängen und müssen, wenn nicht die ganze Kurve c auf einen Punkt zusammenschrumpfen soll, gewiß einmal zu einer einfach geschlossenen Komponente gelangen. (Man vgl. hierzu insbesondere die Schlußweise des § 2, vor allem die zum Beweis von (2. 17) herangezogenen Überlegungen.)

Diese hier skizzierten Überlegungen erleiden nur dann Modifikationen, wenn J selbst oder eines der δ_k „maximal unzerlegbar" ist (§ 5), d. h. wenn ihre einzigen maximalen vollständigen Überdeckungen (§§ 1 und 2) mit dem zu überdeckenden Intervall identisch werden. Dann existiert aber notwendig auf J bzw. dem δ_k ein Typ einer aus echten Teilintervallen erster Art hervorgerufenen Intervallschachtelung, wie er in § 5 als „vollständig verdichtete" Intervallschachtelung beschrieben wird, und der zu der Abspaltung eines Paares einfacher Jordanbögen Anlaß gibt mit den im Struktursatz genannten Eigenschaften. Wir erhalten also auch hier einfach geschlossenen Teilkurven von c (vornehmlich solche dritter Art) und damit die Möglichkeit ihrer fortschreitenden Ausscheidung, wodurch die Fortsetzbarkeit unseres Zerlegungsprozesses gewährleistet ist.

Diese Gedankengänge finden ihre präzise Fassung in der Aufstellung des Ω-Prozesses in § 7, der als Folge der Rektifizierbarkeit von c in höchstens abzählbar unendlich vielen Schritten (die allerdings nicht notwendigerweise auch in abgezählter[5]) Ordnung aufeinander folgen müssen) die ganze Kurve c ausschöpft und nur eine Restmenge vom Maße Null zurückläßt (§ 8).

Die Disposition der Arbeit wird aus den einzelnen Paragraphenüberschriften mit genügender Deutlichkeit hervorgehen, so daß sich ein weiteres Eingehen darauf hier erübrigen dürfte; wir wollen daher an dieser Stelle nur noch darauf hinweisen, daß die Feinheiten betr. des Maßes in Formel (E. 2) eine direkte Folge des von Carathéodory[6]) gebildeten Begriffes des linearen Maßes einer Punktmenge im E_n sind, worauf im Anhang eingegangen werden soll.

I.

§ 1. **Vollständige Überdeckungen U.** Wir betrachten das Parameterintervall $J = (0 \leqq t \leqq 1)$ unserer geschlossenen rektifizierbaren Kurve c (E. 1) und wollen auf

[5]) Vgl. Fußnote [18]).

[6]) C. Carathéodory, Über das lineare Maß von Punktmengen — eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs, Nachr. d. kgl. Ges. Wiss. Göttingen 1914, S. 404—426, insbes. S. 420ff.

ihm gewisse Überdeckungen U definieren, die aus getrennt liegenden Intervallen erster Art bestehen und für unseren Zerlegungsbeweis von methodischer Bedeutung sein werden. Im folgenden bezeichnen wir mit dem Buchstaben δ (mit evtl. noch anzuhängenden Indizes) stets ein *offenes* Intervall erster Art (s. Einleitung) und, falls nötig, dessen abgeschlossene Hülle durch Überstreichen des Intervallbuchstabens mit $\bar{\delta}$.

Die in Rede stehenden Überdeckungen U des Intervalles J werden dann durch folgende Eigenschaften charakterisiert: ist

$$U = \sum_k \delta_k \tag{1.1}$$

irgendeine vollständige Überdeckung, so besteht dieselbe aus höchstens abzählbar vielen getrenntliegenden offenen Teilintervallen δ_k erster Art von J, die so aus J ausgewählt sind, daß jedes weitere auf J evtl. noch vorhandene Intervall erster Art entweder mit einem δ_k aus (1.1) identisch wird oder aber mit mindestens einem derselben *innere* Punkte gemein haben muß.

Da diese Definition auch J selbst als triviale vollständige Überdeckung mit einschließt, so verlangen die nichttrivialen vollständigen Überdeckungen den Zusatz: Jede nichttriviale vollständige Überdeckung enthält mindestens ein *echtes* Unterintervall von J. — Falls etwa J selbst schon Repräsentant einer einfach geschlossenen Kurve ist, existieren solche nichttrivialen vollständigen Überdeckungen natürlich nicht. —

Die Existenz solcher vollständigen Überdeckungen U wird nun durch folgendes Konstruktionsverfahren sichergestellt: Man greife aus J willkürlich ein echtes Teilintervall δ_1 der ersten Art heraus und untersuche, ob auf der (offenen) Restmenge $J - \bar{\delta}_1$ noch weitere Teilintervalle erster Art vorkommen. Trifft dies zu, so greife man eines von ihnen, δ_2, heraus und verfahre mit der neuen Restmenge $J - (\bar{\delta}_1 \dotplus \bar{\delta}_2)$ in der nämlichen Weise. Diesen Prozeß setze man so weit fort wie möglich, und man erhält dann in der Vereinigung $\sum_k \delta_k$ der so gewonnenen Intervalle δ_k, wie einleuchtet, eine vollständige Überdeckung von J.

Zu dem Namen „vollständige Überdeckung" will ich noch erläuternd bemerken, daß er keineswegs die Forderung nach einer möglichst weitgehenden Unterteilung der einzelnen δ_k einschließt [7]), sondern daß er — und das mit Nachdruck — darauf hinweisen will, daß außerhalb einer vollständigen Überdeckung U, d. h. in der Komplementärmenge $J - U$, keine Intervalle erster Art mehr vorkommen können.

§ 2. **Maximale vollständige Überdeckungen U^*.** Unter den nichttrivialen vollständigen Überdeckungen U auf J treffen wir nun eine engere Auswahl, indem wir unser Augenmerk auf deren „Länge" richten, worunter wir die Summe der Längen der U aufbauenden Intervalle δ_k (s. (1.1)) verstehen. Und zwar wollen wir auf J sogenannte maximale vollständige Überdeckungen gewinnen, das sind solche, deren Längen einen größtmöglichen Wert erreichen. Die Existenz derselben behauptet der

Satz 1. *Auf J gibt es mindestens eine vollständige Überdeckung U von maximaler Länge, die allerdings unter Umständen auch die triviale, d. h. J selbst, sein kann. Ist sie nicht trivial, so besteht sie, wie jede vollständige Überdeckung, aus höchstens abzählbar unendlich vielen getrenntliegenden echten offenen Teilintervallen erster Art von J, die alle eine von Null verschiedene Länge haben.*

Zum Beweis dieses Satzes gehen wir aus von einer Maximalfolge $\{U_i\}$ nichttrivialer vollständiger Überdeckungen auf J, deren Längen μU_i gegen die obere Grenze

[7]) Man beachte den Unterschied gegen die in § 5 geschaffene Begriffsbildung der vollständig verdichteten Intervallschachtelung $\mathfrak{D}$.

λ konvergieren:

$$\mu U_1 \leqq \mu U_2 \leqq \cdots \leqq \mu U_i \leqq \mu U_{i+1} \leqq \cdots \to \lambda = \text{Max.} \tag{2. 1}$$

Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß hierin nur Ungleichheitszeichen vorkommen, da für den Fall unendlich vieler *Gleichheits*zeichen unter den U_i schon unendlich viele maximale vollständige Überdeckungen enthalten sind und somit nichts mehr zu beweisen wäre, und weil der Fall nur *endlich* vieler Gleichheitszeichen in (2. 1) durch Verschieben des Anfangspunktes der Kette um endlich viele Stellen nach rechts auf den Fall von lauter *Un*gleichheitszeichen allein zurückgeführt werden kann. Wir schreiben jetzt jedes U_i in seiner Zerlegung in die es aufbauenden Intervalle δ_{ik} auf:

$$U_i = \sum_k \delta_{ik}, \tag{2. 2}$$

und denken uns dabei die Zählung der δ_{ik} (k variabel) für festes i so vorgenommen, daß die Längen $\mu\delta_{ik}$ eine nicht wachsende Folge bilden. Aus der Überdeckungsfolge $\{U_i\}$ stellen wir dann in der bekannten Weise mittels des Cantorschen Diagonalverfahrens eine Auswahlfolge $\{\widehat{U}_i\}$ her ($\widehat{U}_i = \sum_k \hat{\delta}_{ik}$), bei welcher für jedes feste k die Intervalle $\hat{\delta}_{ik}$ mit wachsendem $i \to \infty$ gegen ein Grenzintervall δ_k^* konvergieren:

$$\lim_{i\to\infty} \hat{\delta}_{ik} = \delta_k^*. \tag{2. 3}$$

Daß dabei δ_k^* eine von Null verschiedene Länge haben muß, ist für das konvergenzerzeugende Auswahlverfahren unwesentlich, wird aber gleich nachher genauer untersucht werden müssen. Zunächst wollen wir aber noch den Sinn der hier gemeinten Konvergenz feststellen; er bedeutet: Zu jedem $\varrho > 0$ und jedem k existiert ein Index $i_0(\varrho; k)$ derart, daß für alle Indizes $i \geqq i_0(\varrho; k)$ die Endpunkte der $\hat{\delta}_{ik}$ in den ϱ-Kreisen um die gleichnamigen Endpunkte des Grenzintervalles δ_k^* enthalten sind.

Um nun die Frage nach der Bogenlänge der δ_k^* zu klären, beginnen wir mit der Bemerkung, daß stets die Ungleichung

$$\mu\delta_k^* \geqq \mu\delta_{k+1}^* \tag{2. 4}$$

gilt; denn sie ist eine unmittelbare Folge der von uns vorgenommenen Anordnung der Intervalle $\hat{\delta}_{ik}$ (i = fest, k = variabel) nach abnehmender Bogenlänge und der von uns verwandten konvergenzerzeugenden Auswahlvorschrift. Der Beweis des Satzes 1 ist jetzt enthalten in dem Beweis des folgenden Hilfssatzes:

Hilfssatz 1. *Ist für ein gewisses* k_0

$$\sum_{k=1}^{k_0} \mu\delta_k^* < \lambda, \tag{2. 5}$$

so ist auch noch

$$\mu\delta_{k_0+1}^* > 0. \tag{2. 6}$$

In der Tat, denken wir uns den Hilfssatz bewiesen und bezeichnen die Summe aller von Null verschiedenen Intervalle δ_k^* mit U^*:

$$U^* = \sum_{\mu\delta_k^* \neq 0} \delta_k^*. \tag{2. 7}$$

Dann ist wegen des Hilfssatzes $\mu U^* = \lambda$, und es kann in der offenen Komplementärmenge $J - \overline{U}^*$ kein echtes Teilintervall δ^0 mehr geben, das zu einem geschlossenen Teilbogen erster Art von $\mathfrak{c}$ gehört; denn falls dies zuträfe, entstünde in der Vereinigung $U^* + \delta^0 = U^0$ eine neue zulässige Überdeckung des Intervalles J (vgl. § 1) mit der größeren Länge $\lambda + \mu\delta^0 > \lambda$. Es wäre also λ, entgegen der Voraussetzung, noch nicht die obere Grenze. Daß aber U^* nach der Vorschrift des § 1 erzeugt werden kann, ist ohne

weiteres einleuchtend, da zwei verschiedene $\delta_{k'}^*$ und $\delta_{k''}^*$ keine inneren Punkte miteinander gemein haben können.

Beweis des Hilfssatzes. Nehmen wir entgegen (2. 6) an, es gelte

$$\mu\delta_{k_0+1}^* = 0 \tag{2. 8}$$

und damit wegen (2. 4) auch die entsprechenden Gleichungen

$$\mu\delta_k^* = 0 \qquad \text{für alle } k \geqq k_0 + 1. \tag{2. 9}$$

Dann sei $\mathfrak{N}$ die Gesamtheit der Punkte auf J, die Häufungspunkte von Punkten der ausgearteten Intervalle (2. 9) sind. Wir konstruieren um jeden Punkt $P < \mathfrak{N}$ ein konzentrisches Intervall $l(P)$ von der zunächst willkürlichen Länge $\mu l(P)$ und bezeichnen mit $w_i(P)$ die Gesamtheit der ganz, d. h. mit Einschluß der beiden Endpunkte, in $l(P)$ gelegenen Intervalle $\hat{\delta}_{ik}$ der Restmenge

$$\widehat{V}_i = \widehat{U}_i - \sum_{k=1}^{k_0} \hat{\delta}_{ik} = \sum_{k \geqq k_0+1} \hat{\delta}_{ik}\,, \tag{2. 10}$$

die durch Streichung der ersten k_0 Intervalle $\hat{\delta}_{i1}, \ldots, \hat{\delta}_{ik_0}$ aus $\widehat{U}_i$ entsteht. Wegen (2. 9) gilt dann offensichtlich

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, \mu w_i(P) = \overline{\lim_{i\to\infty}}\, \mu(\widehat{V}_i \frown l(P))\,. \tag{2. 11}$$

Nun setze ich

$$f(P; l) \equiv f(P; l(P)) = \overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{\mu w_i(P)}{\mu l(P)} \tag{2. 12}$$

und

$$g(P) = \lim_{\varrho\to 0} [\text{obere Grenze}_{\mu l \leqq \varrho}\, f(P; l(P))]\,, \tag{2. 13}$$

wobei zur Bildung der oberen Grenze in (2. 13) alle mit P konzentrischen Intervalle $l(P)$ heranzuziehen sind, deren Längen unterhalb der vorgegebenen Zahl $\varrho > 0$ verbleiben.

Mit Hilfe der Funktion $g(P)$ in (2. 13) zerlegen wir jetzt die Menge $\mathfrak{N}$ in zwei punktfremde Teile

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0 + \mathfrak{N}_1, \tag{2. 14}$$

von denen $\mathfrak{N}_0$ alle jene Punkte $P < \mathfrak{N}$ umfaßt, in denen $g(P) = 0$ ist, und $\mathfrak{N}_1$ alle übrigen Punkte aus $\mathfrak{N}$ enthält. Wir zeigen dann zunächst die Richtigkeit der beiden Relationen

$$\mu\,\mathfrak{N}_1 = 0 \tag{2. 15}$$

und

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, \mu(\widehat{V}_i \frown \mathfrak{W}_0) \leqq \mu(\mathfrak{W}_0 - \mathfrak{N}_0)\,, \tag{2. 16}$$

in welchen $\mathfrak{W}_0$ eine beliebige Umgebung von $\mathfrak{N}_0$ bedeutet.

Wir beginnen mit (2. 15). Es sei $h > 0$ eine beliebige Zahl und $\mathfrak{N}_1(h)$ diejenige Teilmenge aus $\mathfrak{N}_1$, in deren Punkten $g(P) \geqq h > 0$ ist. Wenn wir dann zeigen können, daß für jedes positive $h > 0$

$$\mu\,\mathfrak{N}_1(h) = 0 \tag{2. 17}$$

ist, so sind wir mit dem Beweis von (2. 15) schon fertig; denn es durchlaufe h eine monoton gegen Null abnehmende Folge positiver Zahlen $\{h_k\}$. Wegen der Annahme (2. 17) gilt dann für alle diese h_k

$$\mu\,\mathfrak{N}_1(h_k) = 0;$$

andererseits ist $\mathfrak{N}_1$ die Vereinigung aller $\mathfrak{N}_1(h_k)$ und hat daher als Vereinigung von abzählbar vielen Mengen mit dem Lebesgueschen Maße Null selbst das Maß Null.

Um nun (2. 17) zu verifizieren, gehen wir von der Annahme des Gegenteils

$$\mu^* \mathfrak{N}_1(h) > 0 \tag{2. 18}$$

aus [8]), und führen diese ad absurdum. Zu dem Ende geben wir uns eine monoton fallende Folge positiver Zahlen

$$\varrho_1 > \varrho_2 > \cdots > \varrho_k > \varrho_{k+1} > \cdots \to 0 \tag{2. 19}$$

fest vor, und bezeichnen mit $l(P; \varrho_k)$ das mit $P < \mathfrak{N}_1(h)$ konzentrische Intervall von der Länge $\mu l(P; \varrho_k) = \varrho_k$. Wir können dann, wie aus den Definitionen (2. 13) und (2. 12) von $g(P)$ und $f(P; l)$ folgt, in jedem $l(P; \varrho_k)$ wenigstens ein $w_i(P)$, — ich will es, weil es auf den Index i nicht ankommt, wohl aber auf die Zahl ϱ_k, mit $w(P; \varrho_k)$ bezeichnen —, so finden, daß

$$\frac{\mu w(P; \varrho_k)}{\mu l(P; \varrho_k)} \geqq \frac{h}{2} > 0 \tag{2. 20}$$

erfüllt ist; und diese $w(P; \varrho_k)$ übernehmen dann in dem nachher anzuwendenden Vitalischen Überdeckungsverfahren [9]) die Rolle der den einzelnen Punkten $P < \mathfrak{N}_1(h)$ zuzuordnenden Umgebungen.

Es sei nun $\mathfrak{V}$ irgendeine Umgebung von $\mathfrak{N}_1(h)$ auf J, welche zu der vorgegebenen Zahl $\eta_1 > 0$ die wegen (2. 18) gewiß mögliche Ungleichung

$$\mu^*(\mathfrak{V} - \mathfrak{N}_1(h)) \leqq \eta_1 \mu^* \mathfrak{N}_1(h) \tag{2. 21}$$

befriedigt, und es zerfalle $\mathfrak{V}$ in die höchstens abzählbar unendlich vielen getrenntliegenden zusammenhängenden Teilintervalle $\mathfrak{V}_\nu$:

$$\mathfrak{V} = \sum_\nu \mathfrak{V}_\nu . \tag{2. 22}$$

Dann wollen wir für den Durchschnitt

$$\mathfrak{V}_\nu \frown \mathfrak{N}_1(h) = \mathfrak{N}_{1\nu}(h) \tag{2. 23}$$

setzen [10]). Nun beschreiben wir den Bögen $\mathfrak{V}_\nu < \mathfrak{c}$ ein Polygon $\Pi_\nu = \sum_\sigma \Pi_{\nu\sigma}$ ein, welches zu der vorgegebenen Zahl $\eta_2 > 0$ paßt, indem es die Ungleichung

$$1 \geqq \frac{\sum_\sigma \Pi_{\nu\sigma}}{\mu \mathfrak{V}_\nu} \geqq 1 - \eta_2 \tag{2. 24}$$

erfüllt. Wir haben hier die Bedeutung von Π_ν und $\Pi_{\nu\sigma}$ gleich dahin erweitert, daß diese Buchstaben auch noch die Bogenlänge der von ihnen gemeinten Polygone bezeichnen. Es bedeute schließlich $\mathfrak{V}_{\nu\sigma}$ den über der als Sehne anzusehenden Polygonseite $\Pi_{\nu\sigma}$ stehenden Teilbogen von $\mathfrak{c}$ (sowie auch dessen Darstellungsintervall auf J), und

$$\mathfrak{N}_{1\nu\sigma}(h) = \mathfrak{V}_{\nu\sigma} \frown \mathfrak{N}_1(h) . \tag{2. 25}$$

Wir betrachten jetzt vorübergehend (d. h. bis zur Formel (2. 27)) nur solche Intervalle $\mathfrak{V}_{\nu\sigma} < J$, für welche $\mu \mathfrak{N}_{1\nu\sigma}(h) > 0$ ist, und wenden auf sie den Vitalischen Überdeckungssatz [11]) an; nach diesem gibt es zu der (jetzt dritten) vorgegebenen Zahl $\eta_3 > 0$ aus der Gesamtheit der den einzelnen Punkten $P < \mathfrak{N}_{1\nu\sigma}(h)$ zugeordneten Punktmengen $w(P; \varrho_k)$ endlich viele getrenntliegende $w_{\nu\sigma}^{(j)}(P_j) = w_{\nu\sigma}^{(j)}$, die ganz in $\mathfrak{V}_{\nu\sigma}$ enthalten sind und die Ungleichung

---

[8]) Da wir noch nicht wissen, ob $\mathfrak{N}_1(h)$ meßbar ist, schreiben wir hier das Zeichen μ^* für das äußere Maß an Stelle des Zeichens μ für das Maß schlechthin.

[9]) Carathéodory, Vorl. über reelle Funktionen, 2. Aufl. (1927), § 288.

[10]) Mit $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}_1$ bezeichnen wir hier der Kürze halber auch gleichzeitig die ihnen entsprechenden Teilbögen auf $\mathfrak{c}$.

[11]) Das ist wegen der Ungleichung (2. 20) erlaubt; siehe l. c. [9]), § 288.

$$(2.\ 26)\quad \mu\mathfrak{V}_{\nu s} \geqq \sum_j \mu w_{\nu s}^{(j)} \geqq \sum_j \mu^*(\mathfrak{N}_{1\nu s}(h) \cap w_{\nu s}^{(j)}) \geqq (1-\eta_3)\,\mu^*\mathfrak{N}_{1\nu s}(h)$$

befriedigen; ferner gilt für die Polygonseite $\Pi_{\nu s}$ die Abschätzung

$$(2.\ 27)\quad \Pi_{\nu s}^2 = \sum_{i=1}^{n}\Big(\int_{\mathfrak{V}_{\nu s}} x_i\,dt\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n}\Big(\int_{\mathfrak{V}_{\nu s}-\sum_j w_{\nu s}^{(j)}(P_j)} x_i\,dt\Big)^2 \leqq n\,[\mu\mathfrak{V}_{\nu s} - \sum_j \mu w_{\nu s}^{(j)}]^2$$
$$\leqq n\,[\mu\mathfrak{V}_{\nu s} - (1-\eta_3)\,\mu^*\mathfrak{N}_{1\nu s}(h)]^2\,,$$

wobei (2. 26), $|\dot{x}_i| \leqq 1$ und $\int_{w_{\nu s}^{(j)}} \dot{x}_i\,dt = 0$ benutzt wurden. Man achte nun darauf, daß (2. 27) auch noch für diejenigen $\mathfrak{V}_{\nu s}$ richtig bleibt, für die $\mu\mathfrak{N}_{1\nu s}(h) = 0$ ist, so daß wir von jetzt ab wieder von der obigen Einschränkung absehen können. Wenn wir nun in (2. 27) die Quadratwurzel ziehen und über s summieren, so finden wir

$$(2.\ 28)\qquad \Pi_\nu \leqq \sqrt{n}\,[\mu\mathfrak{V}_\nu - (1-\eta_3)\,\mu^*\mathfrak{N}_{1\nu}(h)]\,,$$

wobei $\mathfrak{V}_\nu = \sum_s \mathfrak{V}_{\nu s}$ zu beachten ist. Verbindet man jetzt (2. 28) mit (2. 24) zu

$$(1-\eta_2)\,\mu\mathfrak{V}_\nu \leqq \sqrt{n}\,[\mu\mathfrak{V}_\nu - (1-\eta_3)\,\mu^*\mathfrak{N}_{1\nu}(h)]\,,$$

so erhält man hieraus nach Summation über ν und Beachtung von (2. 21), (2. 22) und (2. 23)

$$(1-\eta_2)\,\mu^*\mathfrak{N}_1(h) \leqq (1-\eta_2)\,\mu\mathfrak{V} \leqq \sqrt{n}\,(\eta_1+\eta_3)\,\mu^*\mathfrak{N}_1(h)\,.$$

Streicht man hierin auf beiden Seiten das wegen (2. 18) von Null verschiedene $\mu^*\mathfrak{N}_1(h)$, so folgt

$$1-\eta_2 \leqq \sqrt{n}\,(\eta_1+\eta_3)\,,$$

eine Ungleichung, die wegen der Willkür der η_1, η_2, η_3 unmöglich bestehen kann; denn die linke Seite wird für hinreichend kleine η beliebig nahe gleich 1, während die rechte Seite beliebig nahe gleich 0 wird. — Damit ist (2. 17) bewiesen. —

Wir kommen jetzt zum Beweis von (2. 16); auch er beruht auf der Anwendung des Vitalischen Überdeckungssatzes. Wir schreiben $\varepsilon_1 > 0$ beliebig vor und benutzen nur solche $l(P;\varrho_k)$ (Bedeutung wie in Formel (2. 19)), die außerdem noch die Ungleichung

$$(2.\ 29)\qquad f(P;l(P;\varrho_k)) \leqq \varepsilon_1$$

erfüllen. Zufolge der Definition (2. 14) von $\mathfrak{N}_0$ sind solche $l(P;\varrho_k)$ zu beliebig kleinen ϱ_k stets auffindbar. Ist dann $\mathfrak{W}_0$ eine beliebige Umgebung von $\mathfrak{N}_0$, so existiert nach dem Vitalischen Überdeckungssatz in $\mathfrak{W}_0$ mindestens ein Satz höchstens abzählbar unendlich vieler getrenntliegender Intervalle $l(P;\varrho_k)$, sie mögen $l^{(j)}$ heißen, die in ihrer Vereinigung die ganze Menge $\mathfrak{N}_0$ bis auf höchstens einen Rest vom Lebesgueschen Maße Null überdecken:

$$(2.\ 30)\qquad \mu\mathfrak{N}_0 = \sum_j \mu(\mathfrak{N}_0 \cap l^{(j)}) \leqq \sum_j \mu l^{(j)} \leqq \mu\mathfrak{W}_0.$$

Nun ist

$$\widehat{V}_i \cap \mathfrak{W}_0 = \sum_j \widehat{V}_i \cap l^{(j)} + \widehat{V}_i \cap (\mathfrak{W}_0 - \sum_j l^{(j)})$$

und daher

$$(2.\ 31)\qquad \mu(\widehat{V}_i \cap \mathfrak{W}_0) = \sum_j \mu(\widehat{V}_i \cap l^{(j)}) + \mu[\widehat{V}_i \cap (\mathfrak{W}_0 - \sum_j l^{(j)})].$$

Beachtet man jetzt die ganz allgemein geltende Relation

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \sum_j \mu(\widehat{V}_i \cap l^{(j)}) \leqq \sum_j \overline{\lim_{i\to\infty}}\, \mu(\widehat{V}_i \cap l^{(j)})$$

sowie die wegen (2. 30) bestehende Ungleichung

$$\mu[\widehat{V}_i \cap (\mathfrak{W}_0 - \sum_j l^{(j)})] \leqq \mu(\mathfrak{W}_0 - \sum_j l^{(j)}) \leqq \mu(\mathfrak{W}_0 - \mathfrak{N}_0),$$

so erhält man aus (2. 31)

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, \mu(\widehat{V}_i \cap \mathfrak{W}_0) \leqq \sum_j \overline{\lim_{i\to\infty}}\, \mu(\widehat{V}_i \cap l^{(j)}) + \mu(\mathfrak{W}_0 - \mathfrak{N}_0). \tag{2. 32}$$

Andererseits gilt wegen (2. 29), der Definitionsgleichung (2. 12) und der Beziehung (2. 11)

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, \mu(\widehat{V}_i \cap l^{(j)}) \leqq \varepsilon_1 \cdot \mu l^{(j)}.$$

Dies in (2. 32) eingesetzt und nochmals (2. 30) herangezogen führt zu

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, \mu(\widehat{V}_i \cap \mathfrak{W}_0) \leqq \varepsilon_1 \cdot \mu\mathfrak{W}_0 + \mu(\mathfrak{W}_0 - \mathfrak{N}_0),$$

womit (2. 16) schon dasteht, da ε_1 beliebig klein sein durfte.

Mit Hilfe der nunmehr bewiesenen Beziehungen (2. 15) und (2. 16) ist es jetzt ein leichtes, den Beweis des Hilfssatzes zu Ende zu führen. Es sei $\mathfrak{W}$ eine beliebige Umgebung der Punktmenge $\mathfrak{N}$. Wir können dann, weil

$$\mathfrak{W} - \mathfrak{N} = (\mathfrak{W} - \mathfrak{N}_0) - \mathfrak{N}_1$$

ist, im Hinblick auf (2. 15) und (2. 16)

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, \mu(\widehat{V}_i \cap \mathfrak{W}) \leqq \mu(\mathfrak{W} - \mathfrak{N}) \tag{2. 33}$$

schreiben. Betrachtet man nun die unter Benutzung von (2. 10) aufgestellte Identität

$$\widehat{U}_i = \widehat{V}_i \cap \mathfrak{W} + (\widehat{V}_i - \widehat{V}_i \cap \mathfrak{W}) + \sum_{k=1}^{k_0} \hat{\delta}_{ik} \tag{2. 34}$$

und bemerkt, daß auf Grund der Definition der Punktmenge $\mathfrak{N}$ und der Konvergenz der $\hat{\delta}_{ik} \to \delta_k^*$ (k = fest) für hinreichend großes i außerhalb der Umgebung $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{N}$ nur Punkte von $\widehat{V}_i$ gelegen sein können, die ein beliebig kleines Gesamtmaß besitzen, so versteht man die Richtigkeit der Beziehung

$$\lim_{i\to\infty} \mu(\widehat{V}_i - \widehat{V}_i \cap \mathfrak{W}) = 0,$$

die in (2. 34) eingesetzt und unter Heranziehung von (2. 33)

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, \mu\widehat{U}_i \leqq \sum_{k=1}^{k_0} \mu\delta_k^* + \mu(\mathfrak{W} - \mathfrak{N}) \tag{2. 35}$$

ergibt. Weil nun aber $\mathfrak{W}$ eine willkürliche Umgebung von $\mathfrak{N}$ ist, läßt sich $\mu(\mathfrak{W} - \mathfrak{N})$ beliebig klein machen, und man kann daher insbesondere erreichen, daß die rechte Seite von (2. 35) kleiner als λ wird, wenn man noch Rücksicht nimmt auf die Voraussetzung (2. 5) des Hilfssatzes 1. Das steht aber im Widerspruch zu der Voraussetzung (2. 1), nach der auch die Auswahlfolge $\{\widehat{U}_i\}$ eine Maximalfolge bilden sollte. — Damit ist alles bewiesen. —

§ 3. **Die Bedeutung der maximalen vollständigen Überdeckungen** für unser Problem ergibt sich aus dem

Satz 2. *Die Komplementärmenge $J - U^*$ einer maximalen vollständigen Überdeckung U^* ist immer Repräsentant einer einfach geschlossenen Teilkurve von* $\mathfrak{c}$, *die freilich unter Umständen auch nur aus einem einzigen Punkte $P < \mathfrak{c}$ bestehen kann.*

Beim Beweis brauchen wir nur den Fall

$$\mu(J - U^*) > 0 \tag{3. 1}$$

zu berücksichtigen, da im Falle $\mu(J - U^*) = 0$ die Restmenge $J - U^*$ offenbar nur einem einzigen Punkte auf c zugeordnet sein kann. Wenn nun auf $J - U^*$ zwei Punkte P_1 und P_2 vorhanden wären, die Endpunkte eines Intervalles $\delta(P_1, P_2)$ erster Art sind, das eine Teilmenge positiven Maßes von $J - U^*$ enthielte, so könnte U^* dadurch zu einer Überdeckung größerer Länge erweitert werden, daß man $\delta(P_1, P_2)$ an die Stelle aller derjenigen $\delta_k^* < U^*$ setzte, die mit ihm *innere* Punkte gemein haben. Das stünde aber im Widerspruch zu der definierenden Eigenschaft der Überdeckung U^*, von maximaler Bogenlänge zu sein.

§ 4. **Maximale Überdeckungen der Intervallbreite ε.** Für spätere Zwecke, insbesondere für den in § 7 beschriebenen Ω-Prozeß, ist es notwendig, die maximalen vollständigen Überdeckungen in Klassen nach der Länge ihres größten Teilintervalles δ_1^* einzuteilen. Bezeichnet für eine maximale vollständige Überdeckung U^* die Zahl $\beta(U^*)$ diese Länge des größten Teilintervalles $\delta_1^* < U^*$ (Formel (1. 1) und (2. 2)), so wird es auf der Gesamtheit aller maximalen vollständigen Überdeckungen U^* eine untere Grenze $\beta_{\min}$ dieser $\beta(U^*)$ geben. Man zeigt dann mit genau denselben Hilfsmitteln, die zum Beweis des Satzes 1 (§ 2) herangezogen wurden [12]), daß es mindestens eine maximale vollständige Überdeckung $U_{\min}^*$ auf J gibt, deren größtes Teilintervall $\delta_{1\,\min}^*$ diese untere Grenze wirklich erreicht, und daß diese untere Grenze positiv ist:

$$\mu\delta_{1\,\min}^* = \beta(U_{\min}^*) = \beta_{\min} > 0. \tag{4. 1}$$

[12]) Wir werden hier und im folgenden oft der Kürze halber einfach auf die in § 2 verwendete Beweismethode zurückgreifen, ohne darüber noch längere Ausführungen anzustellen; wir müssen uns dazu nur ein für allemal versichern, daß und wann ein solcher Rückgriff erlaubt ist.

Geht man nun die Darlegung des Beweises zu Satz 1 in § 2 aufmerksam durch, so erkennt man, daß er von den die vollständigen Überdeckungen U_i aufbauenden Intervallen δ_{ik} erster Art gar keine anderen Eigenschaften verwendet als eben die, daß sie U_i aufbauen und von erster Art sind. Er erlaubt es also ohne weiteres, den δ_{ik} noch weitere zusätzliche Beschränkungen aufzuerlegen, vorausgesetzt, daß diese Beschränkungen „*invariant*" sind gegenüber dem Prozeß des Grenzüberganges; das soll heißen: Ist $\delta_k^* = \lim_{i\to\infty} \delta_{ik}$ das Grenzintervall, gegen welches bei festgehaltenem k die Folge der Intervalle $\{\delta_{ik}\}$ konvergiert, so müssen die den δ_{ik} auferlegten Beschränkungen von der Natur sein, daß sie auch noch dem δ_k^* zukommen. Von solcher Art ist aber offensichtlich die hier in Rede stehende Nebenbedingung, daß nämlich die Längen $\beta(U^*)$ des größten in den U^* auftretenden Intervalls δ_1^* erster Art unterhalb einer festen Schranke bleiben sollen, während gleichzeitig die Längen μU^* für alle zu betrachtenden U^* den gleichen Wert behalten. Denn man kann dann eine Folge $\{U_i^*\}$ aus lauter maximalen vollständigen Überdeckungen mit der Eigenschaft

$$\lim_{i\to\infty} \beta(U_i^*) = \beta_{\min}$$

bilden, und findet dann für sie die Ungleichung (2.35), d. i. hier

$$\lambda = \lim_{i\to\infty} \mu U_i^* \leqq \sum_{k=1}^{k_0} \mu\delta_k^{**} + \mu(\mathfrak{W} - \mathfrak{N}), \tag{4. a}$$

bestätigt, in welcher λ den konstanten Wert der μU_i^* $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ bedeutet, $U_i^* = \sum_k \delta_{ik}^*$ und $\delta_k^{**} = \lim_{i\to\infty} \delta_{ik}^*$ ist, und $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{W}$ die in § 2 (bei Gl. (2. 9) resp. Gl. (2. 29)) angegebenen Bedeutungen haben. Wegen der Willkür der Umgebung $\mathfrak{W}$ der Menge $\mathfrak{N}$ ist aber nun das zweite Glied rechts in (4. a) beliebig klein, und daher gilt für die Grenzmenge $U^{**} = \sum_k \delta_k^{**}$ die Beziehung

$$\lambda \leqq \mu U^{**};$$

U^{**} ist aber offensichtlich eine vollständige Überdeckung von J, und darum kann hier nur das Gleichheitszeichen stehen, womit die Behauptung des § 4 verifiziert ist.

Eine andere, ebenfalls gegenüber dem Prozeß des Grenzüberganges invariante Bedingung für die δ_{ik} der vollständigen Überdeckungen U_i ist die, daß die Endpunkte der δ_{ik} auf einer vorgegebenen *abgeschlossenen* Punktmenge $\mathfrak{E}$ von J gelegen sein sollen. Auf sie werden wir im nächsten Paragraphen stoßen.

Ist dann $\varepsilon \geqq \beta_{u.in}$ irgendeine positive Zahl, so nennen wir eine jede maximale vollständige Überdeckung U^*, deren $\beta(U^*)$ die Ungleichung

$$\beta(U^*) \leqq \varepsilon \tag{4. 2}$$

erfüllt, eine maximale Überdeckung der Intervallbreite ε.

II.

§ 5. Maximal unzerlegbare Intervalle. In Satz 1 (§ 2) wurde auf die Möglichkeit hingewiesen, daß die maximalen vollständigen Überdeckungen von J trivial werden könnten, indem sie mit J zusammenfallen; für die im folgenden (Abschnitt III) beabsichtigte Zerlegung der Kurve c ist nun der Fall von Bedeutung, daß J (oder überhaupt irgendein Intervall erster Art) außer den trivialen *maximalen* vollständigen Überdeckungen überhaupt keine anderen mehr zuläßt. Solche Intervalle wollen wir *maximal unzerlegbar* nennen und im gegenwärtigen Paragraphen eingehender studieren.

Unsere Überlegungen setzen wir wieder, wie auch schon im Abschnitt I, an dem Beispiel des Parameterintervalls J auseinander, das wir dabei als maximal unzerlegbar vorausgesetzt denken. Es bestehen dann nur zwei Möglichkeiten: Entweder J entspricht schon einer einfach geschlossenen Kurve, und dann erübrigt sich jede weitere Zerlegung, oder aber J gestattet nichttriviale *vollständige* Überdeckungen, wenn auch keine nichttrivialen *maximalen* vollständigen Überdeckungen. Der zweite Fall, der uns hier allein interessiert, bedingt dann auf J notwendig das Vorhandensein einer aus lauter Intervallen erster Art aufgebauten Intervallschachtelung

$$\delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_k < \delta_{k+1} < \cdots \to J, \tag{5. 1}$$

die gegen J konvergiert [13]). Diese kann nun von zweierlei Beschaffenheit sein: Entweder es existiert auf J kein weiteres Intervall δ erster Art mehr, welches echte Teilmenge eines δ_{k+1} ist und für welches das dem δ_{k+1} unmittelbar vorausgehende δ_k echte Teilmenge von δ ist; oder aber es gibt auf J noch solche Intervalle δ, die von den Intervallen δ_k der Kette (5. 1) verschieden sind und

$$\delta_k < \delta < \delta_{k+1} \tag{5. 2}$$

befriedigen. Ist (5. 1) von der zuerst genannten Beschaffenheit, so wollen wir die Intervallschachtelung *vollständig verdichtet* nennen; im zweiten Falle aber müssen wir uns zunächst eine solche vollständig verdichtete Intervallschachtelung verschaffen. Bei dieser Gelegenheit wollen wir bemerken, daß eine vollständig verdichtete Intervallschachtelung *nicht* notwendig *nur abzählbar unendlich viele Intervalle* zu enthalten braucht, *sondern sehr wohl* deren *überabzählbar unendlich viele* besitzen kann. Das Verfahren nun, das zu ihrer Erzeugung herangezogen werden kann, ist (unter Berücksichtigung von (5. 2)) dem in § 1 beschriebenen Verfahren zur Herstellung einer vollständigen Überdeckung von J völlig analog, und kann etwa folgendermaßen dargestellt werden:

Wir denken uns zwischen die beiden Intervalle

$$\delta_k \equiv (\tau'_k \leqq t \leqq \tau''_k) \quad \text{und} \quad \delta_{k+1} \equiv (\tau'_{k+1} \leqq t \leqq \tau''_{k+1})$$

schon eine gewisse (endliche oder unendlich große) Anzahl weiterer Intervalle $\delta_{i_l} \equiv (t'_{i_l} \leqq t \leqq t''_{i_l})$ erster Art eingeschoben, und dadurch für deren vordere (hintere) Endpunkte t'_{i_l} (t''_{i_l}) die beiden Ungleichheitsketten

$$\tau'_{k+1} \leqq \cdots \leqq t'_{i_1} \leqq \cdots \leqq t'_{i_2} \leqq \cdots \leqq t'_{i_l} \leqq \cdots \leqq \tau'_k$$

---

[13]) Wegen des Begriffes der Konvergenz vgl. die anläßlich der Formel (2. 3) gemachten Erläuterungen.

und

$$\tau''_{k+1} \geqq \cdots \geqq t''_{i_1} \geqq \cdots \geqq t''_{i_2} \geqq \cdots \geqq t''_{i_l} \geqq \cdots \geqq \tau''_k$$

erhalten. Wir bilden dann aus je zwei Zahlen t'_{i_1} und t'_{i_2} bzw. t''_{i_1} und t''_{i_2} der ersten bzw. zweiten dieser Reihen die Intervalle $\lambda' \equiv (t'_{i_1} \leqq t \leqq t'_{i_2})$ und $\lambda'' \equiv (t''_{i_1} \geqq t \geqq t''_{i_2})$, und nennen diese beiden Intervalle „zusammengehörig", wenn dafür gesorgt ist, daß stets die Zahlen t'_{i_1} zusammen mit t''_{i_1} und ebenso t'_{i_2} zusammen mit t''_{i_2} ein Intervall δ_{i_1} bzw. δ_{i_2} der oben angesetzten hypothetischen Intervallschachtelung zwischen δ_k und δ_{k+1} begrenzen.

Wir legen uns schließlich irgend zwei Folgen

$$\lambda'_1 > \lambda'_2 > \cdots > \lambda'_k > \lambda'_{k+1} > \cdots \to \Lambda'$$

und

$$\lambda''_1 > \lambda''_2 > \cdots > \lambda''_k > \lambda''_{k+1} > \cdots \to \Lambda''$$

ineinandergeschachtelter Intervalle λ'_k und λ''_k vor, in denen für jeden Index k stets die Intervalle gleichen unteren Indexes, λ'_k und λ''_k, zusammengehörig sein sollen, und welche gegen die Durchschnitte Λ' bzw. Λ'' konvergieren, und legen diesen Folgen als einzige beschränkende Bedingung nur die auf, daß *kein innerer* Punkt t' von Λ' (t'' von Λ'') zusammen mit einem beliebigen Punkte t'' von Λ'' (t' von Λ') ein Intervall $\delta \equiv (t' \leqq t \leqq t'')$ erster Art begrenzen darf, welches schon in der hypothetischen Intervallschachtelung zwischen den Intervallen δ_k und δ_{k+1} enthalten ist. — Es wird also sehr wohl zugelassen, daß ein Randpunkt t' von Λ' mit einem Randpunkt t'' von Λ'' zusammen ein solches Intervall erster Art begrenzt. — Wir erweitern dann unsere hypothetische Intervallschachtelung durch Hinzufügen eines, gegebenenfalls existierenden, Intervalls erster Art $\delta \equiv (t' \leqq t \leqq t'')$, $t' < \Lambda'$ und $t'' < \Lambda''$, bei dem wenigstens einer der Endpunkte t' oder t'' innerer Punkt seiner Umfassungsmenge Λ' bzw. Λ'' ist.

Jedem solchen Folgenpaar $\{\lambda'_k\}, \{\lambda''_k\}$ ineinander geschachtelter zusammengehöriger Intervalle λ'_k und λ''_k entspricht also, falls überhaupt, wenigstens eine echte Erweiterung der hypothetisch angesetzten Intervallschachtelung zwischen den Intervallen δ_k und δ_{k+1} der Folge (5. 1), und jede solche Erweiterung erfüllt gewiß die Bedingung (5. 2). Da nun das beschriebene Konstruktionsverfahren offenbar iterationsfähig ist, so läßt sich mit seiner Hilfe der „Zwischenraum" zwischen den beiden Intervallen δ_k und δ_{k+1} vollständig mit Intervallen δ erster Art, die alle untereinander Relationen vom Typus (5. 2) genügen, ausfüllen, und damit ist die Existenz wenigstens einer zu (5. 1) gehörigen vollständig verdichteten Intervallschachtelung gesichert.

Wir denken uns also als Ausgangspunkt für unsere weiteren Überlegungen eine vollständig verdichtete Intervallschachtelung $\mathfrak{D}$ gefunden, und legen dem J irgendeinen Durchlaufungssinn bei, etwa den ihm vermöge der Gleichungen (E. 1) aufgezwungenen; bezüglich dieser Orientierung zerfallen dann die Endpunkte aller in $\mathfrak{D}$ vorkommenden Intervalle δ in zwei Klassen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$, von denen beispielshalber $\mathfrak{E}_1$ alle „vorderen", $\mathfrak{E}_2$ alle „hinteren" Endpunkte der $\delta < \mathfrak{D}$ enthalten möge, und die, wie aus dem Umstande, daß $\mathfrak{D}$ vollständig verdichtet ist, unmittelbar hervorgeht, abgeschlossene Punktmengen auf J darstellen.

Nun kann es geschehen, daß auf J Intervalle δ' erster Art existieren, die ihre beiden Endpunkte auf $\mathfrak{E}_1$ bzw. ihre beiden Endpunkte auf $\mathfrak{E}_2$ haben. Diese Intervalle δ' gehören gewiß nicht zu $\mathfrak{D}$. Sofern sie existieren, bilden wir mit ihrer Hilfe (wenn möglich) zwei Überdeckungen $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$, wobei $\mathfrak{V}_i$ nur aus solchen getrenntliegenden Intervallen δ' erster Art aufgebaut ist, die ihre beiden Endpunkte auf $\mathfrak{E}_i$ haben, und sorgen dafür, daß die Längen $\mu\mathfrak{V}_i$ maximal werden. Die Existenz solcher Überdeckungen $\mathfrak{V}_i$ maximaler

Länge ist auf Grund der Methoden des § 2 gesichert, nur hat man hier bei ihrer Anwendung immer noch die Nebenbedingungen mit zu berücksichtigen, die den Endpunkten der δ' auferlegt sind [14]).

Wir bezeichnen jetzt mit $\bar{J}_i$ das kleinste auf $\bar{J}$ gelegene abgeschlossene Teilintervall, welches die abgeschlossene Menge $\mathfrak{E}_i$ umschließt, und nennen

$$\tilde{O}_i = \bar{J}_i - \mathfrak{V}_i \tag{5. 3}$$

die Restmenge, die nach Entfernung der maximalen Überdeckung $\mathfrak{V}_i$ auf $\bar{J}_i$ zurückbleibt. Im allgemeinen wird $\tilde{O}_i$ noch nicht Repräsentant eines einfachen Jordanschen Teilbogens von $\mathfrak{c}$ sein, so daß mindestens ein Intervall erster Art gefunden werden kann, dessen beide Endpunkte zu $\tilde{O}_i$ gehören, das aber mit keinem Intervall der Menge $\mathfrak{V}_i$ identisch ist, und welches einer geschlossenen Teilkurve von $\mathfrak{c}$ zugeordnet ist. Unter diesen eventuell vorhandenen Intervallen erster Art sei $\hat{\delta}_{1i}$ eines von möglichst großer Länge; man ist sicher, daß nicht beide Endpunkte von $\hat{\delta}_{1i}$ auf dem in $\tilde{O}_i$ zurückgebliebenen Rest der Menge $\mathfrak{E}_i$ gelegen sein können, da sonst $\mathfrak{V}_i$ durch Hinzufügung des $\hat{\delta}_{1i}$ erweitert werden könnte, entgegen der für $\mathfrak{V}_i$ gestellten Maximalitätsforderung.

Man untersuche dann, ob noch weitere Intervalle erster Art auf $\bar{J}_i$ existieren, deren beide Endpunkte zu $\tilde{O}_i$ gehören, von denen aber keines mit einem Intervall der Menge $\mathfrak{V}_i$ identisch ist oder mit $\hat{\delta}_{1i}$ *innere* Punkte gemein hat. Gegebenenfalls sei $\hat{\delta}_{2i}$ ein solches Intervall von möglichst großer Bogenlänge, und man sehe dann wieder zu, ob etwa in gleicher Weise ein weiteres Intervall erster Art $\hat{\delta}_{3i}$ von maximaler Bogenlänge gefunden werden kann, dessen beide Endpunkte zu $\tilde{O}_i$ gehören, das mit keinem der Intervalle $\hat{\delta}_{1i}$ und $\hat{\delta}_{2i}$ innere Punkte gemein hat und auch von allen konstituierenden Intervallen der Menge $\mathfrak{V}_i$ verschieden ist. Diesen Prozeß setze man solange fort, wie es überhaupt geht, und gewinnt durch ihn eine aus lauter getrenntliegenden Intervallen erster Art bestehende Überdeckung

$$\hat{\Delta}_i = \sum_k \hat{\delta}_{ki} \tag{5. 4}$$

des Intervalls $\bar{J}_i$. Wenn man nun bedenkt, daß aus der Konstruktion der $\hat{\delta}_{ki}$ folgt, daß, wenn es schon Intervalle aus $\mathfrak{V}_i$ gibt, die mit einem $\hat{\delta}_{ki}$ innere Punkte gemeinsam haben, solche Intervalle höchstens mit Ausnahme eines ihrer Endpunkte ganz *in* dem $\hat{\delta}_{ki}$ gelegen sein müssen, so leuchtet ein, daß die Menge

$$\hat{O}_i = \bar{J}_i - [\hat{\Delta}_i + (\mathfrak{V}_i - \hat{\Delta}_i \frown \mathfrak{V}_i)] \tag{5. 5}$$

Repräsentant eines einfachen Jordanschen Teilbogens von $\mathfrak{c}$ sein wird, der sogar eine von Null verschiedene Länge besitzt; denn der erste Teil der Behauptung ist eine unmittelbare Folge der Konstruktion der Intervallmenge $\hat{\Delta}_i$ (5. 4), die in ihrer Art nicht mehr erweiterungsfähig ist. Träfe aber etwa der zweite Teil der Behauptung nicht zu, d. h. bestünde etwa für $i = 1$ die Gleichung

$$\mu\bar{J}_1 = \mu\hat{\Delta}_1 + \mu(\mathfrak{V}_1 - \hat{\Delta}_1 \frown \mathfrak{V}_1), \tag{5. 6}$$

so bedeutete dies eine maximale vollständige Überdeckung des Intervalles $\bar{J}_1$ durch die aus lauter getrenntliegenden (s. o.) Intervallen erster Art bestehende Intervallmenge $\hat{\Delta}_1 + (\mathfrak{V}_1 - \hat{\Delta}_1 \frown \mathfrak{V}_1)$. Es wäre also J_1 Repräsentant einer *geschlossenen* Teilkurve von $\mathfrak{c}$. Wenn man sich nun vergegenwärtigt, daß auch die Restmenge $J - (J_1 + J_2)$

[14]) Siehe hierzu die Anmerkung [12]) zu § 4.

Repräsentant einer (sogar einfach) geschlossenen Teilkurve von $\mathfrak{c}$ ist, so folgerte man hieraus, daß auch J_2 Urbild einer geschlossenen Teilkurve von $\mathfrak{c}$ sein muß. In der Zerlegung

$$J = J_1 + J_2 + [J - (J_1 + J_2)]$$

läge daher eine *maximale* vollständige Überdeckung von J vor, die *nichttrivial* ist. Das steht aber im Widerspruch zu der Voraussetzung, J sei maximal unzerlegbar. —

Wir wissen also jetzt, daß die Menge $\hat{O}_i$ (5. 5) Urbild eines einfachen Jordanschen Teilbogens $\mathfrak{J}_i$ von $\mathfrak{c}$ ist, und können somit als zusammenfassendes Ergebnis dieses Paragraphen den Satz aussprechen:

Satz 3. *Ist das Parameterintervall J maximal unzerlegbar, so gestattet die Kurve $\mathfrak{c}$, falls sie nicht schon einfach geschlossen ist, eine Zerlegung, bei welcher außer höchstens abzählbar unendlich vielen geschlossenen Teilkurven erster Art auch zwei einfache Jordanbögen auftreten, die beide eine von Null verschiedene Länge haben.*

§ 6. Betrachten wir jetzt noch etwas näher die beiden einfachen Jordanbögen $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ von $\mathfrak{c}$, die in der Zerlegung des vorigen Paragraphen aufgetreten sind. Zunächst sieht man sofort, daß der Anfangs-(End-)punkt von $\mathfrak{J}_1$ mit dem End-(Anfangs-)punkt von $\mathfrak{J}_2$ zusammenfällt, so daß also die Durchschnittsmenge $\mathfrak{J}_1 \frown \mathfrak{J}_2$ gewiß nicht leer ist. Um aber $\mathfrak{J}_1 \frown \mathfrak{J}_2$ noch weiter charakterisieren zu können, führen wir die Mengen

$$\mathfrak{E}_i^- = \mathfrak{E}_i - \mathfrak{E}_i \frown \mathfrak{V}_i \qquad (i = 1, 2) \tag{6. 1}$$

ein, deren jede aus allen denjenigen Punkten von $\mathfrak{E}_i$ besteht, die nicht schon in den Intervallen der maximalen Überdeckung $\mathfrak{V}_i$ (s. § 5) enthalten sind. $\mathfrak{E}_i^-$ ist wie $\mathfrak{E}_i$ abgeschlossen. Erinnert man sich nun der Art der Mitwirkung der vollständig verdichteten Intervallschachtelung $\mathfrak{D}$ bei der Erzeugung der Urbildmengen $\hat{O}_i$ der Jordanschen Kurvenbögen $\mathfrak{J}_i$, so erkennt man, daß sich der Durchschnitt $\mathfrak{J}_1 \frown \mathfrak{J}_2$ auf $\mathfrak{J}_i$ als eine Teilmenge von $\mathfrak{E}_i^-$ darstellt, wenn man der Einfachheit halber mit $\mathfrak{E}_i^-$ hier gleich auch die Gesamtheit der (6. 1) zugeordneten Punkte auf $\mathfrak{c}$ bezeichnet.

Nun besagt ein allgemeiner Satz (s. Anhang) über Punktmengen auf rektifizierbaren Jordankurven, daß die Schnittmenge $\mathfrak{J}_1 \frown \mathfrak{J}_2$ auf jeder der beiden Kurven $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ dasselbe Maß besitzt, wenn man sie das eine Mal mit der zu $\mathfrak{J}_1$, das andere Mal mit der zu $\mathfrak{J}_2$ gehörigen Lebesgueschen Maßfunktion ausmißt. Ist insbesondere $\mathfrak{J}_1 \frown \mathfrak{J}_2$ von positivem Maße, so berühren sich $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ in einem maßgleichen Kern [15]) $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{J}_1 \frown \mathfrak{J}_2$, und aus der von uns vorgenommenen Konstruktion der $\mathfrak{J}_i$ mittels der vollständig verdichteten Intervallschachtelung $\mathfrak{D}$ folgt dann noch weiter, daß die Berührung der beiden Kurven $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ in den Punkten von $\mathfrak{M}$ eine gegensinnige ist. —

Damit sind die an (E. 2) anschließenden Aussagen des Struktursatzes im Prinzip schon erhalten.

III.

§ 7. **Der Ω-Ausschöpfungsprozeß.** Wir sind jetzt soweit vorbereitet, um auch den ersten Teil des Struktursatzes zu beweisen. Es bedarf wohl nicht noch einer eigenen Hervorhebung, daß die in den Abschnitten I und II für das Parameterintervall J allein beschriebenen Operationen auch auf jedes Teilintervall δ erster Art ausgeübt werden dürfen, und wir werden daher jetzt ohne viele Bedenken die dort gebildeten Begriffe hier ganz allgemein benutzen.

---

[15]) Wobei $\mathfrak{M}$ für die beiden Maßfunktionen denselben Maßwert bekommt.

Wir geben uns also irgendein Intervall δ erster Art beliebig vor und beschreiben zunächst für dasselbe das Schema S, das ihm eine ganz bestimmte offene Teilmenge $U(\delta) < \delta$ zuordnet.

Schema S.

I. $U(\delta)$ besteht aus höchstens abzählbar unendlich vielen getrenntliegenden Teilintervallen erster Art von δ, und ist
   a) falls δ *nicht* maximal unzerlegbar ist, eine nichttriviale maximale Überdeckung kleinster Intervallbreite (§ 4) von δ,
   b) falls aber δ maximal *un*zerlegbar ist, die Restmenge $\delta - [\Gamma_1(\delta) + \Gamma_2(\delta)]$, die nach dem § 5 auf δ zurückbleibt, wenn man aus ihm die beiden einfachen Jordanbögen $\Gamma_1(\delta)$ und $\Gamma_2(\delta)$ entfernt hat [16]); dabei soll noch die nach den Vorschriften des § 5 gebildete Restmenge $\delta - [\Gamma_1(\delta) + \Gamma_2(\delta)]$ die Zusatzbedingung erfüllen, daß die Länge des größten in ihrem Aufbau enthaltenen Teilintervalls erster Art möglichst klein wird (Existenzbeweis wie in § 4) [17]).

II. Die *Reduktion von* $U(\delta)$ *zu* $V(\delta)$ wird durch die Ausscheidung aller derjenigen Teilintervalle erster Art aus $U(\delta)$ vollzogen, welche einfach geschlossenen Teilkurven von $\mathfrak{c}$ entsprechen.

Dann können wir den Ω-Prozeß durch die folgende Induktionsvorschrift definieren:

Der **Ω-Prozeß** nimmt seinen Ausgang von dem Parameterintervall J, das als Erzeugnis des nullten Operationsschrittes angesehen wird. Ist dann das Ergebnis des k-ten Operationsschrittes die offene Punktmenge

$$O_k = \sum_i \delta_i^{(k)}, \tag{7. 1}$$

die aus getrenntliegenden und nach abnehmender Bogenlänge angeordneten Intervallen erster Art aufgebaut ist, so besteht der $(k+1)$-te Operationsschritt des Ω-Prozesses in der Anwendung des Operationsschemas S auf das längste Intervall $\delta_1^{(k)}$ aus (7. 1), dem Übergang von $\delta_1^{(k)}$ zu der Intervallmenge $V(\delta_1^{(k)})$ und der nachträglichen Umordnung der aus $V(\delta_1^{(k)})$ und $\sum_{i \geqq 2} \delta_i^{(k)}$ stammenden Teilintervalle erster Art im Sinne einer nach abnehmender Bogenlänge fortschreitenden Intervallfolge

$$\{\delta_i^{(k+1)}\}, \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{7. 2}$$

Bei jedem Schritt des Ω-Prozesses werden also zusammen mit höchstens abzählbar unendlich vielen einfach geschlossenen Teilkurven erster Art entweder eine einfach geschlossene Teilkurve zweiter Art oder aber ein Paar einfacher Jordanbögen aus $\mathfrak{c}$ ausgeschieden.

Es ist nun ohne weiteres klar, daß die einzelnen nach Vorschrift aufeinanderfolgenden Schritte des Ω-Prozesses nicht eine durch die endlichen Ordnungszahlen $1, 2, 3, \ldots$ auszuschöpfende Anordnung zu bilden brauchen, da sehr wohl die Längen $\mu\delta_1^{(k)}$ gegen eine von Null verschiedene Größe konvergieren können, wenn man die k nur auf endliche Ordnungszahlen beschränkt. Daß im ganzen trotzdem nur höchstens abzählbar unendlich viele Schritte ausgeführt werden, bedarf daher noch eines Beweises. Er ergibt sich aus der Betrachtung einer dem Ω-Prozeß zugeordneten monotonen Funktion $\varphi(\varepsilon)$:

---

[16]) Wir haben hier der Einfachheit halber diese auf $\mathfrak{c}$ gelegenen Jordankurven mit demselben Symbol $\Gamma_i(\delta)$ wie ihre Darstellungspunktmengen auf δ bezeichnet.

[17]) Siehe hierzu die Anmerkung [12]) zu § 4.

Bezeichnet ε_k die Länge des größten in (7. 1) vorkommenden Teilintervalles

$$\varepsilon_k = \mu\delta_1^{(k)}, \tag{7. 3}$$

so bilden die Zahlen $\{\varepsilon_k\}$ eine monoton fallende Zahlenmenge

$$1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \cdots > \varepsilon_k > \varepsilon_{k+1} > \cdots \to 0, \tag{7. 4}$$

wobei aber wieder zu beachten ist, daß auch sie nicht bei Erhaltung der Größenbeziehungen (7. 4) in abgezählter[18]) Ordnung aufeinander zu folgen brauchen. Wir definieren dann die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ durch die Vorschrift:

$$\begin{cases} \varphi(\varepsilon) = \mu O_k & \text{im Intervall } \varepsilon_{k+1} < \varepsilon \leqq \varepsilon_k, \\ \varphi(\varepsilon) = 1 & \text{im Intervall } \varepsilon_1 < \varepsilon \leqq 1. \end{cases} \tag{7. 5}$$

Sie stellt eine auf dem ganzen halboffenen Intervall $0 < \varepsilon \leqq 1$ definierte monotone Funktion dar, die ihre Unstetigkeiten allein an denjenigen Stellen ε_k hat, die den k-ten Operationsschritten in Ω zugeordnet sind. Nun hat eine monotone Funktion aber höchstens abzählbar unendlich viele Unstetigkeiten und darum umfaßt der Ω-Prozeß auch nur höchstens abzählbar unendlich viele Operationsschritte.

§ 8. Wenn wir also noch zeigen können, daß die Restmenge, die nach Entfernung aller durch den Ω-Prozeß geforderten einfach geschlossenen Teilkurven und einfachen Jordanbögenpaare auf $\mathfrak{c}$ zurückbleibt, das Lebesguesche Maß Null hat, so ist auch der erste Teil des Struktursatzes bewiesen. Diese Restmenge heiße $\mathfrak{n}$. Daß ihr Lebesguesches Maß verschwindet, erkennt man nun genau so wie bei der Gleichung (2. 17), wenn man bedenkt, daß $\mathfrak{n}$ der Durchschnitt aller $\{O_k\}$ ist, und wenn man für die erforderliche Anwendung des Vitalischen Überdeckungssatzes die den einzelnen Punkten $P \frown \mathfrak{n}$ zuzuordnenden und auf Null zusammenschrumpfenden Umgebungen aus den Mengen $\{\delta_i^{(k)}\}$ entnimmt, deren Intervalle $\delta_i^{(k)}$ wegen (7. 4) für hinreichend große Ordnungszahlen k selbst von beliebig kleiner Länge werden.

Anhang.

§ 9. Wir haben hier noch den Beweis jener allgemeinen Punktmengensätze nachzutragen, welche im § 6 die Aussagen des zweiten Teiles des Struktursatzes[19]) stützten. Wir beginnen mit dem

Satz 4. *Ist $\mathfrak{A}$ irgendeine abgeschlossene Punktmenge auf der rektifizierbaren einfachen Jordankurve $\mathfrak{c}$, so stimmt der Wert ihres Carathéodoryschen linearen Maßes $\lambda\mathfrak{A}$ mit dem Werte ihres Lebesgueschen linearen Maßes $\mu\mathfrak{A}$ überein, in Formeln:*

$$\lambda\mathfrak{A} = \mu\mathfrak{A}. \tag{9. 1}$$

Dem Beweis schicken wir eine kurze Darstellung der von Carathéodory gegebenen Definition des linearen Maßes einer Punktmenge im E_n voraus. Es bedeute $\{\Gamma_i\}$ eine Folge konvexer Punktmengen des E_n, die in ihrer Vereinigung die ganze Punktmenge $\mathfrak{A}$ enthalten, d_i den Durchmesser von Γ_i; ist dann $\varrho > 0$ eine beliebig vorgegebene Zahl, so legen wir der Folge $\{\Gamma_i\}$ die Beschränkung

$$d_i \leqq \varrho, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

auf, die alle ihre Durchmesser zu erfüllen haben. Innerhalb des so abgegrenzten Bereiches zulässiger Überdeckungsfolgen $\{\Gamma_i\}$ konvexer Punktmengen gehen wir dann

[18]) Eine Ordnung soll abgezählt heißen, wenn sie eine Durchnumerierung mit alleiniger Benutzung der endlichen Ordnungszahlen $1, 2, \ldots$ zuläßt.

[19]) D. i. von Formel (E. 2) ab.

bei festem $\varrho > 0$ zur unteren Grenze der eventuell auch divergierenden Durchmessersummen $\sum_i d_i$ über, als deren Ergebnis wir

$$\lambda_\varrho(\mathfrak{A}) = \underset{(d_i \leqq \varrho)}{\text{untere Grenze}} \sum_i d_i$$

notieren. Dann ist das Carathéodorysche lineare Maß einer Punktmenge $\mathfrak{A}$ gegeben durch den stets existierenden Grenzwert

$$\lim_{\varrho \to 0} \lambda_\varrho(\mathfrak{A}) = \lambda\mathfrak{A},$$

der allerdings auch ∞ sein kann. $\lambda\mathfrak{A}$ erfüllt, wie l. c. gezeigt wird, alle Bedingungen der Carathéodoryschen Meßbarkeitstheorie und insbesondere sind für dasselbe alle abgeschlossenen Punktmengen und deren Komplemente meßbar.

Nun beginnen wir mit dem Beweis von (9. 1), indem wir vorbereitend zeigen, daß

$$\mu\mathfrak{A} \geqq \lambda\mathfrak{A} \tag{9. 2}$$

ist. (9. 2) gründet auf folgenden Argumenten:

1. Für zusammenhängende Teilkurvenstücke $\mathfrak{U} < \mathfrak{c}$ gilt die Gleichheit

$$\lambda\mathfrak{U} = \mu\mathfrak{U}. \tag{9. 3}$$

(Carathéodory: l. c. § 29, pg. 424/425.)

2. Für jede $\mathfrak{A}$ enthaltende Umgebung[20]) $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{c}$ gilt für beide Maßfunktionen (Carathéodory und Lebesgue):

$$\lambda\mathfrak{A} \leqq \lambda\mathfrak{U}, \quad \mu\mathfrak{A} \leqq \mu\mathfrak{U}. \tag{9. 4}$$

3. Aus der Definition des Lebesgueschen Maßes $\mu\mathfrak{A}$ als unterer Grenze der $\mathfrak{A}$ enthaltenden Umgebungen $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{c}$ folgt zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ die Existenz eines $\mathfrak{U}$ mit

$$\mu\mathfrak{A} \geqq \mu\mathfrak{U} - \varepsilon. \tag{9. 5}$$

Hieraus ziehen wir den Schluß: Ist $\mathfrak{U} = \Sigma\,\mathfrak{U}_k$ die Zerlegung der Umgebung $\mathfrak{U}$ aus (9. 5) in ihre zusammenhängenden Teilbögen $\mathfrak{U}_k$ von $\mathfrak{c}$, so folgt aus (9. 5), (9. 3) und (9. 4)

$$\mu\mathfrak{A} \geqq \sum_k \mu\mathfrak{U}_k - \varepsilon = \sum_k \lambda\mathfrak{U}_k - \varepsilon = \lambda\mathfrak{U} - \varepsilon \geqq \lambda\mathfrak{A} - \varepsilon,$$

und wenn man hierin $\varepsilon \to 0$ gehen läßt, so ist (9. 2) schon fertig.

Um nun mit Hilfe von (9. 2), das für jede meßbare Teilmenge von $\mathfrak{c}$ gilt, zu (9. 1) zu kommen, betrachten wir eine beliebige Umgebung $\mathfrak{U}$ der Menge $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{c}$ und zerlegen sie nach dem Schema

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{U} - \mathfrak{A}).$$

Wegen der Meßbarkeit der hier auftretenden Punktmengen gilt für beide Maßfunktionen λ und μ:

$$\lambda\mathfrak{U} = \lambda\mathfrak{A} + \lambda(\mathfrak{U} - \mathfrak{A}) \quad \text{und} \quad \mu\mathfrak{U} = \mu\mathfrak{A} + \mu(\mathfrak{U} - \mathfrak{A}),$$

und mit Benutzung von (9. 3) folgt daraus

$$\lambda\mathfrak{A} + \lambda(\mathfrak{U} - \mathfrak{A}) = \mu\mathfrak{A} + \mu(\mathfrak{U} - \mathfrak{A}). \tag{9. 6}$$

Andererseits ist wegen (9. 2)

$$\lambda\mathfrak{A} \leqq \mu\mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \lambda(\mathfrak{U} - \mathfrak{A}) \leqq \mu(\mathfrak{U} - \mathfrak{A}). \tag{9. 7}$$

Dies mit (9. 6) verglichen zeigt, daß in (9. 7) Ungleichheitszeichen überhaupt nicht vorkommen können. Damit ist Satz 4 bewiesen.

---

[20]) Die als eine aus offenen Teilbögen von $\mathfrak{c}$ aufgebaute offene Teilmenge auf $\mathfrak{c}$ gedacht ist.

§ 10. Eine unmittelbare Folge desselben ist der

Satz 5. *Sind $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ zwei rektifizierbare einfache Jordankurven und $\mathfrak{M} = \mathfrak{J}_1 \frown \mathfrak{J}_2$ ihr Durchschnitt, so ergibt sich für ihn, wenn er auf jeder der Kurven $\mathfrak{J}_i$ mit der zugehörigen Lebesgueschen Maßfunktion μ_i ausgemessen wird, in beiden Fällen dieselbe Maßzahl:*

$$\mu_1 \mathfrak{M} = \mu_2 \mathfrak{M}. \tag{10. 1}$$

Beweis. In der Tat ist wegen Satz 4 die Formel (10. 1) gleichbedeutend mit

$$\mu_1 \mathfrak{M} = \lambda \mathfrak{M} = \mu_2 \mathfrak{M},$$

wenn $\lambda \mathfrak{M}$ das Carathéodorysche lineare Maß $\mathfrak{M}$ von bedeutet.

§ 11. Es mögen $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ und $\mathfrak{M}$ die aus dem vorigen Paragraphen her bekannten Bedeutungen haben. Wir wollen dann den Satz beweisen:

Satz 6. *Hat der Durchschnitt $\mathfrak{M} = \mathfrak{J}_1 \frown \mathfrak{J}_2$ auf $\mathfrak{J}_i$ ein positives Lebesguesches Maß, so berühren sich $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ in einem maßgleichen Kerne*[21]) *$\mathfrak{M}' < \mathfrak{M}$, der aus allen denjenigen nicht-isolierten Punkten von $\mathfrak{M}$ besteht, in denen beide Kurven $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ Tangenten besitzen.*

Beweis. Es sei P_0 ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{M}'$, t_i die durch P_0 an $\mathfrak{J}_i$ gelegte Tangente. Wir müssen zeigen, daß t_1 und t_2 von derselben Geraden des E_n getragen werden. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnte man um jedes t_i ($i = 1, 2$) einen „Kreis"-kegel $\varkappa_i$ mit der Spitze P_0 und dem so kleinen Öffnungswinkel $\varepsilon > 0$ legen, daß $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ außer P_0 keine Punkte mehr miteinander gemein haben. Weil nun t_i Tangente an $\mathfrak{J}_i$ ist, liegen alle P_0 hinreichend benachbarten Punkte von $\mathfrak{J}_i$ und damit auch alle solchen Punkte von $\mathfrak{M}$ in $\varkappa_i$; $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ enthalten daher doch außer P_0 noch weitere gemeinsame Punkte, im Widerspruch zu ihrer Konstruktion.

[21]) Maßgleich bedeutet hier: $\mu_i \mathfrak{M}' = \mu_i \mathfrak{M}$ für beide $i = 1$ und $i = 2$.

Eingegangen 27. August 1936.

Ein Identitätssatz für Polynome.

Von *Hans Rohrbach* in Göttingen.

Herr Hasse benötigt bei Untersuchungen über Kongruenzzetafunktionen einen Hilfssatz über Polynome, den ich im folgenden auf seine Anregung hin formulieren und beweisen möchte. Der Satz lautet:

Es seien $f(z)$ und $g(z)$ Polynome von gleichem Grade m. Ferner seien $f_r(z)$ bzw. $g_r(z)$, $r = 1, 2, \ldots$, die Polynome, deren Nullstellen die r-ten Potenzen der Nullstellen von $f_1(z) = f(z)$ bzw. $g_1(z) = g(z)$ sind. Liegen dann die Nullstellen von $f(z)$ sämtlich im Innern oder sämtlich im Äußern des Einheitskreises und ist mit hinreichend großem N

$$f_r(1) = g_r(1) \quad \text{für } r = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

so ist

$$f(z) \equiv g(z). \tag{A}$$

Ist ferner a die Maximalanzahl von absolut gleichen unter den Nullstellen von $f(z)$, so genügt es,

$$N \geqq 2^{a-1}(2^{m+1} - 3) \tag{B}$$

zu wählen.

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

1. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Nullstellen von $f(z)$, $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_m'$ die Nullstellen von $g(z)$, je nach der Größe ihrer absoluten Beträge geordnet:

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \cdots \leqq |\alpha_m|, \quad |\alpha_1'| \leqq |\alpha_2'| \leqq \cdots \leqq |\alpha_m'|.$$

Für $m = 1$ ist der Satz mit $N = 1$ richtig, denn für $f(z) = z - \alpha$, $g(z) = z - \alpha'$ folgt aus $1 - \alpha = 1 - \alpha'$ die Gleichheit von α und α'. Man nehme also an, der Satz sei für Polynome $(m-1)$-ten Grades bereits bewiesen.

Liegen dann die Nullstellen von $f(z)$ sämtlich etwa im Innern des Einheitskreises, so ist also

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \cdots \leqq |\alpha_m| < 1, \tag{2}$$

und es genügt für den Beweis von (A), zu zeigen, daß

$$\alpha_m = \alpha_m' \tag{3}$$

ist. Setzt man nämlich

$$f_r(z) = (z - \alpha_m^r)\varphi_r(z), \quad g_r(z) = (z - \alpha_m'^r)\psi_r(z),$$

so folgt aus (1), (2) und (3), daß mit hinreichend großem N

$$\varphi_r(1) = \psi_r(1) \quad \text{für } r = 1, 2, \ldots, N$$

ist. Daher stimmen $\varphi(z) = \varphi_1(z)$ und $\psi(z) = \psi_1(z)$ als Polynome $(m-1)$-ten Grades auf Grund der Induktionsvoraussetzung überein, mithin auch $f(z) = (z - \alpha_m)\varphi(z)$ und $g(z) = (z - \alpha_m)\psi(z)$.

2. Es seien $c_1^{(r)}, c_2^{(r)}, \ldots, c_m^{(r)}$ die elementarsymmetrischen Funktionen der α_μ^r und $c_1'^{(r)}, c_2'^{(r)}, \ldots, c_m'^{(r)}$ die der $\alpha_\mu'^r$. Dann ist nach (1)

$$1 - c_1^{(r)} + c_2^{(r)} - + \cdots + (-1)^m c_m^{(r)} = 1 - c_1'^{(r)} + c_2'^{(r)} - + \cdots + (-1)^m c_m'^{(r)},$$

d. h.

$$(4) \qquad \begin{aligned} &- \sum_\mu \alpha_\mu^r + \sum_{\mu<\nu} \alpha_\mu^r \alpha_\nu^r - + \cdots + (-1)^m \alpha_1^r \alpha_2^r \cdots \alpha_m^r \\ &\qquad = - \sum_\mu \alpha_\mu'^r + \sum_{\mu<\nu} \alpha_\mu'^r \alpha_\nu'^r - + \cdots + (-1)^m \alpha_1'^r \alpha_2'^r \cdots \alpha_m'^r \end{aligned}$$

für $r = 1, 2, \ldots, N$. Man bezeichne nun die hier für $r = 1$ auftretenden, mit $(-1)^\varkappa$ multiplizierten Produkte der $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ zu je $\varkappa$ ohne Wiederholungen $(\varkappa = 1, 2, \ldots, m)$ der Reihe nach mit $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Ihre Anzahl ist

$$(5) \qquad \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m} = 2^m - 1 = n.$$

Analog seien $\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_n'$ aus den α_μ' zusammengesetzt. Sind ferner $s_1, s_2, \ldots$ die Potenzsummen der β_ν und $s_1', s_2', \ldots$ die Potenzsummen der β_ν', so folgt aus (4), daß für *ungerade* Werte von r

$$(6) \qquad s_r = s_r'$$

ist.

3. Nun bilden aber nach einem Satz von Borchardt [1]) die n ersten ungeraden Potenzsummen von n Größen ein Fundamentalsystem für alle rationalen symmetrischen Funktionen dieser n Größen. Insbesondere lassen sich die elementarsymmetrischen Funktionen p_ν der n Größen in der Form

$$(7) \qquad p_\nu = \frac{R_n^{(\nu)}}{Q_{n-1}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

darstellen, wo die $R_n^{(\nu)}$ und Q_{n-1} gewisse ganze rationale Funktionen der n bzw. $n-1$ ersten ungeraden Potenzsummen sind und $Q_{n-1} = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß die Gleichung

$$F(z) \equiv 1 - p_1 z + p_2 z^2 - + \cdots + (-1)^n p_n z^n = 0$$

zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln besitzt. Tritt dieser Fall ein, so spalte man von $F(z)$ den quadratischen Faktor mit den beiden entgegengesetzt gleichen Wurzeln ab. Dann haben die Koeffizienten des restlichen Polynoms $F_1(z)$ vom Grade $n-2$ die analoge Eigenschaft wie die p_ν, d. h. sie lassen entsprechende Darstellungen wie (7) durch die $n-2$ ersten ungeraden Potenzsummen zu mit einem Nennerpolynom Q_{n-3}, dessen Verschwinden auf zwei entgegengesetzt gleiche Nullstellen von $F_1(z)$ schließen läßt, usw.

Will man jetzt Formel (7) auf die n Größen β_ν bzw. β_ν' und ihre n ersten ungeraden Potenzsummen $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$ bzw. $s_1', s_3', \ldots, s_{2n-1}'$ anwenden, so hat man die beiden Fälle $Q_{n-1} \neq 0$ und $Q_{n-1} = 0$ zu unterscheiden. Da der Gleichung $F(z) = 0$ die

---

[1]) C. W. Borchardt, Über eine Eigenschaft der Potenzsummen ungerader Ordnung, Monatsberichte der Berl. Akad. 1857, 301 = Gesammelte Werke, Berlin 1888, 107. Vgl. auch K. Th. Vahlen, Über Fundamentalsysteme für symmetrische Funktionen, Acta Math. **23** (1900), 91.

Größen $\frac{1}{\beta_\nu}$ bzw. $\frac{1}{\beta'_\nu}$ genügen, so ist der Fall $Q_{n-1} = 0$ dadurch gekennzeichnet, daß unter den Größen β_ν bzw. β'_ν Paare von entgegengesetzt gleichem Wert auftreten.

4. Es werde zunächst der Fall betrachtet, daß *unter den β_ν keine Paare entgegengesetzt gleicher β_ν vorkommen.* Dann ist $Q_{n-1}(s_1, s_3, \ldots, s_{2n-3}) \neq 0$, und da nach (6)

$$Q_{n-1}(s_1, s_3, \ldots, s_{2n-3}) = Q_{n-1}(s'_1, s'_3, \ldots, s'_{2n-3})$$

und

$$R_n^{(\nu)}(s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}) = R_n^{(\nu)}(s'_1, s'_3, \ldots, s'_{2n-1}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, folgt einerseits $Q_{n-1}(s'_1, s'_3, \ldots, s'_{2n-3}) \neq 0$, so daß auch unter den β'_ν keine Paare von entgegengesetzt gleichen β'_ν vorkommen, andererseits aus (7) für $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$p_\nu(s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}) = p_\nu(s'_1, s'_3, \ldots, s'_{2n-1}) .$$

Mithin sind die elementarsymmetrischen Funktionen der β_ν denen der β'_ν gleich, und folglich stimmen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ und $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n$ in einer gewissen Reihenfolge überein.

Nach (2) ist nun

$$|\beta_\nu| < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

nach dem eben Bewiesenen also auch

$$|\beta'_\nu| < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

und daher insbesondere

$$(8) \qquad |\alpha'_1| \leqq |\alpha'_2| \leqq \cdots \leqq |\alpha'_m| < 1 .$$

Sind etwa i absolut größte unter den α_μ vorhanden, so kommen unter den α'_μ, da die β_ν und β'_ν in ihrer Gesamtheit übereinstimmen, ebenfalls i absolut größte vor, und diese beiden Teilsysteme zu je i, etwa

$$(9) \qquad \alpha_{m-i+1}, \alpha_{m-i+2}, \ldots, \alpha_m \quad \text{und} \quad \alpha'_{m-i+1}, \alpha'_{m-i+2}, \ldots, \alpha'_m ,$$

müssen schon für sich einander gleich sein. Bei geeigneter Numerierung gilt dann (3). Damit ist nach Teil 1 für den Fall $Q_{n-1} \neq 0$ die Behauptung (A) bewiesen.

5. Nunmehr werde der zweite Fall betrachtet, daß *unter den β_ν Paare von entgegengesetzt gleichen β_ν auftreten.* Es sei 2^k die niedrigste Potenz von 2, für die *unter den absolut größten* der Zahlen $\alpha_1^{2^k}, \alpha_2^{2^k}, \ldots, \alpha_m^{2^k}$ *keine* Paare entgegengesetzt gleicher Potenzen mehr vorkommen. Eine solche Potenz von 2 existiert. Bildet man nämlich für jedes der absolut größten α_μ die Potenzen $\alpha_\mu, \alpha_\mu^2, \alpha_\mu^4, \ldots, \alpha_\mu^{2^\varkappa}, \ldots$, und ist etwa

$$(10) \qquad \alpha_\mu^{2^\varkappa} = -\alpha_\nu^{2^\varkappa},$$

so fällt bei nochmaligem Quadrieren das Minuszeichen weg, so daß für je zwei der betrachteten α_μ höchstens einmal eine Gleichung der Form (10) bestehen kann. Da nur endlich viele α_μ vorhanden sind, muß es also eine Potenz 2^k der verlangten Art geben.

Man nehme nun diejenigen der Gleichungen (4), für die

$$(11) \qquad r = 2^k \varrho \qquad (\varrho = 1, 3, 5, \ldots, 2n-1)$$

ist. Dann kann man mit diesen Gleichungen, wenn die in der Gleichung mit $\varrho = 1$ auftretenden Glieder einschließlich ihrer Vorzeichen mit $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ auf der linken Seite, mit $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n$ auf der rechten Seite und die Potenzsummen der γ_ν mit $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, die der γ'_ν mit $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots$ bezeichnet werden, analog wie in Teil 2 schließen, daß für un-

gerades $\varrho = 1, 3, \ldots, 2n-1$

$$\sigma_\varrho = \sigma'_\varrho \tag{12}$$

ist.

Unter den γ_ν bzw. γ'_ν können nun noch Paare entgegengesetzt gleicher Größen vorkommen. Nach (12) ist aber

$$Q_{n-1}(\sigma'_1, \sigma'_3, \ldots, \sigma'_{2n-3}) = 0, \quad \text{falls} \quad Q_{n-1}(\sigma_1, \sigma_3, \ldots, \sigma_{2n-3}) = 0$$

ist, und ebenso

$$Q_{n-3}(\sigma'_1, \sigma'_3, \ldots, \sigma'_{2n-7}) = 0, \quad \text{falls} \quad Q_{n-3}(\sigma_1, \sigma_3, \ldots, \sigma_{2n-7}) = 0$$

ist, usw. Daher treten nach Teil 3 bei den γ_ν ebensoviele Paare entgegengesetzt gleicher auf wie bei den γ'_ν. In den gemäß (11) gewählten Gleichungen (4) fallen diese Paare auf jeder Seite weg; man streiche sie auch bei den γ_ν und γ'_ν. Die übrig bleibenden γ_ν bzw. γ'_ν seien $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_l$ bzw. $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_l$. Dann sind die ungeraden Potenzsummen der γ_ν bzw. γ'_ν zugleich die ungeraden Potenzsummen der δ_λ bzw. δ'_λ, und die Gleichungen (12) gelten auch für die δ_λ und δ'_λ. Da unter diesen keine Paare von entgegengesetzt gleichen Größen mehr vorkommen, so darf wieder Formel (7) benutzt werden, und es folgt, daß die elementarsymmetrischen Funktionen der δ_λ denen der δ'_λ gleich sind und daher auch $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_l$ und $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_l$ in einer gewissen Reihenfolge übereinstimmen.

6. Aus (2) ergibt sich nun, daß die absolut größten Potenzen $\alpha_\mu^{2^k}$ unter den δ_λ vorkommen müssen, da diese absolut gleichen Potenzen der α_μ nach Definition von k nicht entgegengesetzt gleich und die übrigen Größen γ_ν nach (2) von absolut kleinerem Betrage sind. Sind wieder $\alpha_{m-i+1}, \alpha_{m-i+2}, \ldots, \alpha_m$ die absolut größten der α_μ, so sind

$$\alpha_{m-i+1}^{2^k}, \alpha_{m-i+2}^{2^k}, \ldots, \alpha_m^{2^k} \tag{13}$$

die absolut größten unter den δ_λ.

Ferner gelten auch jetzt die Ungleichungen (8). Wären nämlich einige $|\alpha'_\mu| > 1$, so wäre deren Produkt, in die Potenz 2^k erhoben, das absolut größte Glied in der Gleichung (4) mit $r = 2^k$, könnte also gegen kein anderes Glied auf derselben Seite der Gleichung fortgefallen sein, gehörte mithin zu den δ'_λ und müßte daher einem der δ_λ gleich sein. Das ist nach (2) unmöglich. Es kann aber auch nie $|\alpha'_\mu| = 1$ gelten. Wären nämlich etwa h der α'_μ vom absoluten Betrage 1, so können von den aus diesen α'_μ gebildeten, in die Potenz 2^k erhobenen $2^h - 1$ Produkten zu je $\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, h$) ohne Wiederholungen (die beim Streichen entgegengesetzt gleicher Glieder nur gegeneinander fortfallen können) nicht alle wegfallen, da $2^h - 1$ ungerade ist. Es würden also unter den δ'_λ Größen vom absoluten Betrage 1 vorkommen, was nach (2) nicht möglich ist.

Aus (8) folgt jetzt wie am Schluß von Teil 4, da die δ_λ und δ'_λ in ihrer Gesamtheit übereinstimmen, daß auch unter den α'_μ die letzten i von demselben größten Absolutbetrage und

$$\alpha'^{2^k}_{m-i+1}, \alpha'^{2^k}_{m-i+2}, \ldots, \alpha'^{2^k}_m \tag{14}$$

den Größen (13) in einer gewissen Reihenfolge gleich sind. Man kann die Numerierung so wählen, daß

$$\alpha_m^{2^k} = \alpha'^{2^k}_m \tag{15}$$

ist. Ist nun $k = 0$, d. h. sind unter den absolut größten der α_μ und α'_μ keine Paare entgegengesetzt gleicher vorhanden, so ist mit (15) die Richtigkeit der für die Behauptung (A) noch zu beweisenden Gleichung (3) gezeigt.

Es sei daher $k > 0$. Dann gibt es in der Gleichung (4) mit $r = 2^{k-1}$ auf der rechten oder linken Seite mindestens ein Paar von entgegengesetzt gleichen Potenzen der absolut größten α_μ bzw. α'_μ. Sind $\pm m_1, \pm m_2, \ldots, \pm m_j$ die verschiedenen Werte, die von solchen Paaren angenommen werden, und ist etwa

$$\alpha_{\mu_1}^{2^{k-1}} = \alpha_{\mu_2}^{2^{k-1}} = \cdots = \alpha_{\mu_s}^{2^{k-1}} = -\alpha_{\nu_1}^{2^{k-1}} = -\alpha_{\nu_2}^{2^{k-1}} = \cdots = -\alpha_{\nu_t}^{2^{k-1}} = m_1,$$

so gibt es unter den $\alpha_\mu'^{2^{k-1}}$ ebenfalls $s+t$ Größen, deren Quadrat gleich m_1^2 ist, also entweder mindestens s Größen, die gleich m_1 sind, oder mindestens t Größen, die gleich $-m_1$ sind. Es seien s' bzw. t' Potenzen $\alpha_\mu'^{2^{k-1}}$ gleich m_1 bzw. $-m_1$. Wäre dann $s \neq s'$ (und damit wegen $s+t = s'+t'$ auch $t' \neq t$), so sei etwa $s < s'$ (also $t > t'$). Man streiche nun auf beiden Seiten der Gleichung (4) mit $r = 2^{k-1}$ die s Potenzen, die gleich m_1 sind, und die t' Potenzen, die gleich $-m_1$ sind, außerdem auf jeder Seite die dann noch vorhandenen Paare entgegengesetzt gleicher Glieder. Aus dieser Gleichung, die nun keine solchen Paare mehr enthält, würde wieder, indem man noch die Gleichungen (4) mit $r = 2^{k-1}\varrho$ ($\varrho = 1, 3, \ldots$) soweit wie nötig heranzieht, nach dem Borchardtschen Satz folgen, daß die nach der Streichung übrig gebliebenen Glieder auf der linken Seite mit denen auf der rechten Seite übereinstimmen. Das ist aber bei $s < s'$ nicht möglich, da dann rechts $s' - s$ Glieder m_1, links $t - t'$ Glieder $-m_1$ übrig bleiben würden. Es ist also $s = s'$, $t = t'$. Analog kann man für $m_2, \ldots, m_j$ schließen.

Damit ist aber gezeigt, daß für $k > 0$ aus dem Übereinstimmen der 2^k-ten Potenzen der absolut größten α_μ und α'_μ das Übereinstimmen ihrer 2^{k-1}-ten Potenzen folgt. Da ferner die Gleichheit der Größen (13) und (14) bereits nachgewiesen ist, folgt induktiv, daß auch im Falle $Q_{n-1} = 0$ die Teilsysteme (9) der absolut größten α_μ und α'_μ in einer gewissen Reihenfolge übereinstimmen. Wegen der für (15) getroffenen Numerierung ist also insbesondere $\alpha_m = \alpha'_m$ und damit (3), also die Behauptung (A), in beiden Fällen bewiesen.

7. Der Satz verlangt, daß die Bedingungen (1) für $r = 1, 2, \ldots, N$ mit hinreichend großem N erfüllt sein sollen. Dem Beweisgang, namentlich Teil 4 und 5, entnimmt man leicht, daß es genügt, N der Bedingung

$$N \geqq (2n-1)\,2^k \tag{16}$$

zu unterwerfen. Hier ist nach (5) $n = 2^m - 1$ (m der Grad der gegebenen Polynome). Eine Abschätzung für k erhält man auf folgende Weise:

Man nehme wieder an, daß

$$\alpha_{m-i+1}, \alpha_{m-i+2}, \ldots, \alpha_m \tag{17}$$

die absolut größten unter den Größen α_μ sind, nenne ein Paar entgegengesetzt gleicher Größen ein unerwünschtes Paar und verstehe unter dem Fortschaffen eines solchen Paares seine Überführung durch Quadrieren in ein Paar gleicher Größen.

Ist nun ein unerwünschtes Paar unter den Zahlen (17) vorhanden, so sind nach Definition von k in Teil 5 alle Zahlen (17) ins Quadrat zu erheben. Dadurch werden die vorher vorhandenen unerwünschten Paare fortgeschafft, aber es kann das quadrierte System neue unerwünschte Paare enthalten. Dann hat man nochmals zu quadrieren und dies Verfahren fortzusetzen, bis zum ersten Male kein unerwünschtes Paar mehr vorkommt. Man erhält so $k+1$ Zeilen mit je i Zahlen; in der $(\varkappa+1)$-ten Zeile stehen die $2^\varkappa$-ten Potenzen der ersten Zeile ($\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, k$), und die ersten k Zeilen enthalten je mindestens ein unerwünschtes Paar.

Bei i Größen können aber durch das sukzessive Quadrieren höchstens $(i-1)$-mal neue unerwünschte Paare entstehen. Kommt nämlich in der ersten Zeile das unerwünschte Paar α_{μ_1} und $\alpha_{\nu_1} = -\alpha_{\mu_1}$ vor, in der zweiten das Paar $\alpha_{\mu_2}^2$ und $\alpha_{\nu_2}^2 = -\alpha_{\mu_2}^2, \ldots$, in der $\varkappa$-ten Zeile das Paar $\alpha_{\mu_\varkappa}^{2^{\varkappa-1}}$ und $\alpha_{\nu_\varkappa}^{2^{\varkappa-1}} = -\alpha_{\mu_\varkappa}^{2^{\varkappa-1}}$, so treten in der zweiten Zeile mindestens zwei gleiche Größen auf $(\alpha_{\mu_1}^2 = \alpha_{\nu_1}^2)$; sie enthält also höchstens $i-1$ verschiedene Werte. In der dritten Zeile kommen mindestens zwei Gleichheiten vor, nämlich $\alpha_{\mu_1}^4 = \alpha_{\nu_1}^4$, $\alpha_{\mu_2}^4 = \alpha_{\nu_2}^4$; sie enthält also höchstens $i-2$ verschiedene Werte. So entsteht durch das Quadrieren in jeder Zeile aus dem unerwünschten Paar der vorangehenden Zeile mindestens eine weitere Gleichung, und die Anzahl der verschiedenen Werte nimmt von Zeile zu Zeile um mindestens eins ab. In der $(i-1)$-ten Zeile stehen daher höchstens $i-(i-2)=2$ verschiedene Werte; diese Zeile ist also die letzte, die noch ein unerwünschtes Paar enthalten kann. Folglich ist

$$k \leqq i-1.$$

Offenbar kann in dieser Ungleichung auch das Gleichheitszeichen stehen.

Mit Rücksicht auf den Induktionsschluß im Beweis des ersten Teils des Satzes hat man, um eine für den ganzen Satz gültige Abschätzung zu gewinnen, das maximale i, d. h. die Maximalanzahl a von absolut gleichen unter den α_μ, zu nehmen. Aus (16) folgt dann, daß es genügt

$$N \geqq (2n-1)\,2^{a-1} = 2^{a-1}\,(2^{m+1}-3)$$

zu wählen. Damit ist auch die Behauptung (B) bewiesen.

8. Im vorhergehenden wurde angenommen, daß die Wurzeln von $f(z)=0$ sämtlich im Innern des Einheitskreises liegen. Liegen nun alle α_μ außerhalb des Einheitskreises, so verläuft der Beweis ganz analog. Es ist dann

$$1 < |\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \cdots \leqq |\alpha_m|,$$

und man schließt statt mit den absolut größten α_μ jetzt mit den absolut kleinsten und zeigt in genau entsprechender Weise, daß $\alpha_1 = \alpha_1'$ sein muß, womit der Rest des Beweises wie in Teil 1 induktiv zu erbringen ist. Oder aber man ersetzt einfach $f(z)$ durch $z^m f\left(\frac{1}{z}\right)$ und $g(z)$ durch $z^m g\left(\frac{1}{z}\right)$.

Schließlich sei noch bemerkt, daß der Satz nicht mehr richtig zu sein braucht, wenn Nullstellen *auf* dem Einheitskreise liegen. Ist z. B. $z=1$ Nullstelle von $f(z)$ und $g(z)$, so ist die Bedingung (1) stets erfüllt, gleichgültig was für Nullstellen $f(z)$ und $g(z)$ sonst besitzen.

Eingegangen 28. August 1936.

Ein Satz über die lückenlose Erfüllung des 5- und 6-dimensionalen Raumes mit Würfeln.

Von *Ott-Heinrich Keller* in Berlin.

Eine bekannte, bis heute noch nicht allgemein bewiesene Vermutung von Minkowski besagt, daß alle n Formen eines unimodularen linearen homogenen Formensystems von n Veränderlichen gleichzeitig durch nichttriviale ganzzahlige Wahl dieser Veränderlichen kleiner gemacht werden können als 1, wenn nicht mindestens eine Form lauter ganzzahlige, zueinander teilerfremde Koeffizienten hat. Dies besagt geometrisch, daß in einer lückenlosen Erfüllung des n-dimensionalen Raumes mit gitterförmig angeordneten, parallel gerichteten, kongruenten Würfeln immer *Säulen* vorkommen müssen. Eine Säule sei dabei eine möglichst umfassende Würfelmenge, deren Mittelpunkte auf einer Parallelen zu einer Würfelkante liegen.

Versucht man, durch Betrachtung dieser Figur an das Problem heranzukommen, so empfindet man bald die Voraussetzung der gitterförmigen Anordnung als störend; daher hatte ich gehofft, man könne den erweiterten Satz beweisen, *daß in einer beliebigen, nicht notwendig gitterförmigen lückenlosen Würfelanordnung stets Säulen vorkommen.* Der Beweis dieses Satzes für allgemeines n ist mir nicht gelungen; ich halte ihn jetzt sogar für falsch.

In der Einleitung einer früheren Arbeit [1]) habe ich diesen erweiterten Satz für $n = 5$ behauptet; den Beweis habe ich damals nicht veröffentlicht, weil der Satz mit dem eigentlichen Inhalt der Arbeit nur in losem Zusammenhang steht. Nun bin ich in der Zwischenzeit wiederholt nach diesem Beweise gefragt worden, insbesondere hat Herr Theodor Schmidt [2]) den Satz dazu benutzt, die Minkowskische Vermutung für $n = 7$ zu beweisen. (Er folgert aus dem erweiterten Satz für n die Richtigkeit der Minkowskischen Vermutung für $n + 2$.) So habe ich mich denn entschlossen, den Beweis zugänglich zu machen.

Ich füge noch den Beweis für $n = 6$ bei. — Nicht, daß ich den Ehrgeiz gehabt hätte, den Satz für möglichst viele Dimensionen zu beweisen, sondern ich vermutete, daß der Satz für $n = 6$ falsch sei und suchte solange nach einem Gegenbeispiel, bis ich mich leider von der Richtigkeit des Satzes überzeugen mußte. Daß er für große n falsch sei, erscheint mir äußerst wahrscheinlich, wenn ich mir die folgende Aufstellung überdenke:

Für $n = 1$ ist der Satz trivial.

Für $n = 2$ liegt jeder Würfel in einer Säule.

Für $n = 3$ gibt es höchstens eine nach drei Richtungen ungerade Staffel 0-ter Dimension, alle übrigen Würfel liegen in Säulen.

[1]) O.-H. Keller, Über die lückenlose Erfüllung des Raumes mit Würfeln, Journ. f. r. u. ang. Math. **163** (1930).

[2]) Th. Schmidt, Über die Zerlegung des n-dimensionalen Raumes in gitterförmig angeordnete Würfel, Schriften d. Math. Sem. d. Univ. Berlin **1** (1932—33).

Für $n = 4$ gibt es in jedem Stamm Säulen, d. h. in jeder Menge von Würfeln, deren x_1-Koordinaten etwa sich nur um ganze Zahlen unterscheiden.

Für $n = 5$ führt folgendes Verfahren zum Ziele: Liegen zwei in der x_1-Richtung benachbarte Würfel W_1 und W_2 nicht in einer Säule, so muß eine Koordinatendifferenz, etwa x_2, von 0 verschieden sein. Wir suchen uns einen Würfel W_3, der W_2 in der x_2-Richtung benachbart ist, und wiederholen die Betrachtung mit W_2 und W_3. Spätestens nach sieben Schritten stoßen wir dabei auf Säulen.

Für $n = 6$ versagt dieses direkte Verfahren; es kann nämlich auf W_1 zurückführen. Man muß hier den ganzen Raum betrachten und die Annahme, es gäbe keine Säulen, zum Widerspruche führen.

Für $n = 7$ versagen diese Beweise, und ich halte die Richtigkeit des Satzes im Falle $n = 7$ für äußerst unwahrscheinlich. Die Konstruktion eines Gegenbeispieles ist mir indessen nicht gelungen.

Für den Beweis legen wir in den Raum ein Koordinatensystem, dessen Achsen den Würfelkanten parallel sind, und setzen die Längen der Würfelkanten gleich 1. Unter den Koordinaten eines Würfels wollen wir die Koordinaten seines Mittelpunktes verstehen. Obere Indizes sollen zur Unterscheidung verschiedener Würfel und ihrer Koordinaten dienen.

Im übrigen möchte ich die Bezeichnungen, Begriffe und Sätze meiner damaligen Arbeit (vgl. Anm. 1) verwenden dürfen, insbesondere den Satz 11: *Unter den Koordinatendifferenzen irgend zweier Würfel befindet sich stets eine ganze, von Null verschiedene Zahl.*

Außerdem werden wir von der dort (§ 8) gegebenen Übersicht über die möglichen Raumerfüllungen des dreidimensionalen Raumes Gebrauch zu machen haben.

Wir werden im folgenden wiederholt den Begriff des *gebändigten* Raumes^r nötig haben. Die Koordinaten seien in zwei Klassen $x_1, x_2, \ldots, x_r$ und $y_1, y_2, \ldots, y_{n-r}$ eingeteilt. Es gebe eine Reihe von Würfeln $W^{(1)}, W^{(2)}, \ldots, W^{(\varrho)}$, für die die x-Koordinaten gleich sind: $x_1 = x_i^{(1)}$. Die y-Koordinaten von $W^{(1)}$ seien $y_i^{(1)}$. Wir betrachten die Würfelerfüllung des Raumes^{n-r} $x_i = x_i^{(1)}$, die durch die Schnitte dieses Raumes mit den Würfeln des Raumes^n geliefert wird. Es möge nun aus Satz 11 folgen, daß in diesem Raume $W^{(1)}$ durch die anderen Würfel $W^{(2)}, \ldots, W^{(\varrho)}$ festgelegt sei. Jetzt betrachten wir den Unterraum h^r

$$y_1 = y_1^{(1)} + k, \qquad y_i = y_i^{(1)} \quad (i \neq 1);$$

alle Würfel, die er schneidet, und für die nicht wenigstens eine Koordinatendifferenz $x_i - x_i^{(1)}$ ganzzahlig und von Null verschieden ist, stehen unter dem Zwang der Würfel $W^{(1)}, W^{(2)}, \ldots, W^{(\varrho)}$; es ist für sie $y_1 = y_1^{(1)} + k$, $y_i = y_i^{(1)}$ $(i \neq 1)$, d. h. ihr Mittelpunkt liegt in R^r. Wir wollen sagen, der Raum R^r sei durch die Würfel $W^{(1)}, W^{(2)}, \ldots, W^{(\varrho)}$ *gebändigt.*

Ein Würfel oder eine Figur von Würfeln, die von einem gebändigten Raum^r geschnitten werden, heiße *echt*, wenn die Mittelpunkte aller Würfel der Figur in dem Raume^r liegen. Wenn es in einem gebändigten Raum den Würfel mit den Koordinaten $x_i = x_i^{(1)}$ gibt, ist die Aussage, der Raum sei gebändigt, inhaltsleer; denn dann gibt es unter den Koordinatendifferenzen $x_i - x_i^{(1)}$ für einen beliebigen Würfel, der den Raum schneidet, stets eine ganze von Null verschiedene Zahl. Gibt es den Würfel mit den Koordinaten $x_i = x_i^{(1)}$, $y_1 = y_1^{(1)} + k$, $y_i = y_i^{(1)}$ nicht, so wollen wir den Raum *eigentlich* gebändigt nennen.

Ein eigentlich gebändigter Raum erster Dimension ist eine Säule. Die Säule erscheint hier am Ende einer Reihe, an der entlang wir uns unter Umständen zu ihr hintasten können.

Ein eigentlich gebändigter Raum zweiter Dimension enthält stets echte Säulen.

Ein eigentlich gebändigter Raum dritter Dimension enthält nur in dem einen Fall keine echten Säulen, wenn es eine nach drei Richtungen ungerade Staffel nullter Dimension gibt, deren Würfel lauter nichtganze Koordinaten haben. Von den Koordinaten einer Säule sind zwei nichtganz und fest, die dritte durchläuft alle ganzzahligen Werte. (Bei diesen Aussagen haben wir $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ gesetzt.)

In einem eigentlich gebändigten Raum vierter Dimension ohne echte Säulen gibt es stets Würfel mit mindestens drei nichtganzen Koordinaten. Die vierte Koordinate kann dem Betrage nach kleiner als $\frac{1}{2}$ angenommen werden.

Die Beweise sind einfach, aber platzraubend; es sei mir gestattet, sie zu übergehen.

Nach diesen Vorbereitungen können wir an den Beweis des Satzes herangehen, daß es in einer beliebigen Raumerfüllung mit Würfeln für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ immer Säulen gibt. Angenommen, wir hätten den Satz schon für $n - 1$ bewiesen. Wir schneiden den Raum^n mit einer Hyperebene^{n-1} $x_1 = c$, die durch keinen Würfeleckpunkt geht. Der Schnitt ist eine Erfüllung eines Raumes^{n-1} mit Würfeln und enthält nach der Annahme Säulen. Sind sie nicht echt, so können sich ihre Würfel nur in den x_1-Koordinaten unterscheiden. Es gibt dann im Raum^n (bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems) einen Würfel $W^{(1)}$ im Nullpunkt und einen Würfel $W^{(2)}$, für den $x_1^{(2)}$ nicht ganz, $x_2^{(2)}$ ganz und von Null verschieden ist und alle übrigen Koordinaten verschwinden. Wie man sich leicht überzeugt, sind die Räume^{n-2} $x_1 = k$ (k ganzzahlig), $x_2 = 0$ durch $W^{(1)}$ und $W^{(2)}$ gebändigt. Gibt es in jedem von ihnen einen Würfel mit verschwindenden Koordinaten, so bilden diese eine Säule; im andern Fall ist einer von ihnen eigentlich gebändigt.

Für $n = 4$ ist damit der Satz bewiesen, denn dieser eigentlich gebändigte Raum^2 enthält echte Säulen.

Es sei $n = 5$. Im Raume^5 gibt es nach dem eben Gesagten einen eigentlich gebändigten Raum^3. Soll er keine echte Säule enthalten, so gibt es in ihm eine (echte) nach drei Richtungen ungerade Staffel nullter Dimension, und alle andern Würfel, die ihn schneiden, liegen in unechten Säulen. Die Würfel einer solchen Säule S mögen etwa die Koordinaten $x_3 = x_3^{(3)}$, $x_4 = x_4^{(3)}$, $x_5 = l$ haben, wo l alle ganzen Zahlen durchläuft. Alle Räume^2 $x_3 = x_3^{(3)}$, $x_4 = x_4^{(3)}$, $x_5 = l$ sind durch die Würfel der nach drei Richtungen ungeraden Staffel und durch den Würfel $x_3 = x_3^{(3)}$, $x_4 = x_4^{(3)}$, $x_5 = 0$ gebändigt, da für diese $x_1 = k$, $x_2 = 0$ ist. Soll die Säule S nicht echt sein, so ist einer dieser Räume^2 eigentlich gebändigt und enthält eine echte Säule. Damit ist der Satz für $n = 5$ bewiesen.

Sehr viel langwieriger ist der Beweis für $n = 6$. Unsere erste Bemühung muß dahin gehen, uns einen gebändigten Raum^3 zu verschaffen. Im Falle $n = 5$ fiel er uns in den Schoß; hier liegt er erheblich versteckter. Aber auch dann, wenn wir ihn haben, sind nicht alle Schwierigkeiten überwunden; denn einen gebändigten Raum^2 braucht es überhaupt nicht zu geben, so daß hier das Entlangtasten an der Reihe der gebändigten Räume unmöglich wird. Tatsächlich können wir aus dem Dasein eines gebändigten Raumes^3 nur immer wieder auf weitere gebändigte Räume^3 schließen. Nehmen wir an, es gäbe keine Säulen, so wird der Raum^6 für alle diese gebändigten Räume^3 zu eng, und wir können den Satz durch einen indirekten Schluß schließlich beweisen. Obwohl ja eine mühsame Verallgemeinerung eines Satzes von 5 auf 6 Dimensionen kein rechtes Interesse hat, habe ich mich doch entschlossen, den Beweis hier anzufügen; denn er zeigt, daß die Methoden, die für $n = 5$ noch schnell und übersichtlich zum Ziele führten, im Falle $n = 6$ nur mühsam und eigentlich zufällig gerade noch ankommen, daß also eine Inangriffnahme der höheren Dimensionszahlen mit diesen Methoden ein recht aussichtsloses Unterfangen ist.

Zum Beweise haben wir noch einige Begriffe nötig. Liegen ein Würfel und eine Säule so zu einander, daß es eine achsenparallele Ebene^2 durch die Achse der Säule und den Mittelpunkt des Würfels gibt, so wollen wir von einer *Höckersäule* sprechen. Sind alle Gitterpunkte etwa der (x_1, x_2)-Ebene Mittelpunkte von Würfeln, so wollen wir diese Figur ein *Schachbrett* nennen. Man kann nun zeigen: In einem gebändigten Raum^3, in dem es mindestens einen Würfel mit drei nichtganzen Koordinatendifferenzen gegen die bändigenden Würfel gibt, kommt entweder eine echte Säule vor, deren Achse durch den Nullpunkt geht, oder eine echte Höckersäule oder ein echtes Schachbrett. Beim Beweise

haben wir uns alle möglichen Raumerfüllungen anzusehen und uns in jedem Fall von der Richtigkeit der Behauptung zu überzeugen. Da keine Schwierigkeiten zu überwinden sind, erlasse man mir die Ausführung des Beweises.

Wir wollen jetzt einmal annehmen, wir hätten einen Raum^6 vor uns, in dem es keine Säulen gibt. Wie wir schon vorhin gesehen haben, gibt es dann (bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems) einen Würfel $W^{(1)}$ im Nullpunkt und einen Würfel $W^{(2)}$ mit vier verschwindenden, einer nichtganzen und einer ganzzahligen Koordinate. Sie bändigen einen Raum^4 R^4 eigentlich; gibt es in ihm keine echten Säulen, so gibt es in ihm doch einen Würfel $W^{(3)}$ mit drei nichtganzen Koordinaten $x_3^{(3)}, x_4^{(3)}, x_5^{(3)}$, und es ist $|x_6^{(3)}| \leqq \frac{1}{2}$. Wir schneiden die Figur mit dem Raum^5 $x_6 = 0$. Die Schnitte mit $W^{(1)}$ und $W^{(2)}$ behalten die Fähigkeit, den Schnittraum^3 R' von R^4 zu bändigen; in R' gibt es einen Würfel $W'^{(3)}$, den Schnitt von $W^{(3)}$, mit drei nichtganzen Koordinaten. Gibt es in R' weder eine Höckersäule noch ein Schachbrett, so gibt es eine Säule, deren Achse durch den Nullpunkt geht, und diese bildet zusammen mit $W^{(1)}$ eine Höckersäule des Raumes $x_6 = 0$.

Soll es keine Säulen geben, so dürfen diese Figuren nicht echt sein. In einer Höckersäule des Raumes^5 $x_6 = 0$ muß es einen Würfel $W^{(4)}$ geben, dessen x_6-Koordinate von der des Höckers und der eines anderen Würfels $W^{(5)}$ der Säule verschieden ist. Dann bändigen $W^{(4)}$, $W^{(5)}$ und der Höcker etwa die Räume $x_1 = x_1^{(4)}$, $x_2 = x_2^{(4)}$, $x_6 = x_6^{(4)} + k$. Soll es keine Säulen geben, muß mindestens einer von ihnen eigentlich gebändigt sein. In derselben Weise zeigt man, daß ein unechtes Schachbrett auf einen eigentlich gebändigten Raum^3 führt.

Es gibt also in einem säulenlosen Raum^6 immer einen eigentlich gebändigten Raum^3 R^3 $x_4 = x_5 = x_6 = 0$, der in den Richtungen x_1, x_2, x_3 ausgebreitet ist. Für die bändigenden Würfel sei $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, für einen von ihnen außerdem $x_4 = k$, $x_5 = x_6 = 0$. R^3 enthält eine echte nach drei Richtungen ungerade Staffel nullter Dimension. In R^3 gibt es Säulen jeder Richtung; es sei durch $x_1 = x_1^{(1)}$, $x_2 = x_2^{(1)}$, $x_3 = k$ ($k = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$) eine Säule S gegeben. Die Räume $x_1 = x_1^{(1)}$, $x_2 = x_2^{(1)}$, $x_3 = k$ sind durch die Würfel der nach drei Richtungen ungeraden Staffel und den Würfel $x_1 = x_1^{(1)}$, $x_2 = x_2^{(1)}$, $x_3 = 0$ gebändigt, einer von ihnen ist eigentlich gebändigt. Wir haben so unendlich viele eigentlich gebändigte Räume^3 gewonnen, die in den Richtungen x_4, x_5, x_6 ausgebreitet sind. In jedem dieser Räume gibt es wieder eine echte nach drei Richtungen ungerade Staffel. Es kann nun sein, daß alle diese Staffeln kongruent und gleichgelegen sind, in dem Sinne, daß jedes Wertetripel x_4, x_5, x_6 entweder in allen diesen Räumen einen Würfel der Staffel darstellt oder in keinem. $x_4^{(2)}, x_5^{(2)}, x_6^{(2)}$ sei in allen diesen Räumen ein Würfel der Staffel. Diese Zahlen sind nichtganz. Wir greifen drei solche von diesen Würfeln heraus, daß die zugehörigen Räume^3 je aus einer Säule der x_1-, x_2-, x_3-Richtung in R^3 entstanden sind. Dann sind unter den Koordinatendifferenzen je zweier von ihnen zwei nichtganze Zahlen. Mit diesen Würfeln vergleichen wir den Würfel $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$, $x_4 = k$, den es ja nach der Definition des gebändigten Raumes R^3 geben muß. Er läßt sich gegen jene drei Würfel in den x_4-, x_5-, x_6-Richtungen so verschieben, daß diese Koordinatendifferenzen verschwinden (nach Satz 9 meiner früheren Arbeit). Dann liegen diese vier Würfel in einem Raum^3 $x_4 = x_4^{(2)}$, $x_5 = x_5^{(2)}$, $x_6 = x_6^{(2)}$. Sie haben zwar alle gegeneinander *eine* ganzzahlige Koordinatendifferenz, aber *zwei* nichtganze. Es gibt aber keine Raumerfüllung, die nicht in Schichten zerfällt, bei der das möglich ist. Da die Differenz jeder Koordinate von zwei passenden dieser vier Würfel einmal nichtganz wird, kann der Raum auch nicht in Schichten zerfallen. Wir sind also in diesem Fall auf einen Widerspruch gestoßen.

Sind die Staffeln nicht kongruent oder wenigstens nicht gleichgelegen, so gibt es eine Ebene^5 etwa $x_6 = x_6^{(2)}$, die mit einigen gebändigten Räumen (unechte) Säulen der x_4-Richtung, mit anderen Säulen der x_5-Richtung gemein hat. S_1 und S_2 seien zwei derartige Säulen. Die Differenzen der x_4- und x_5-Koordinaten zwischen den Würfeln von S_1 und denen von S_2 sind nichtganz, die x_6-Koordinatendifferenz ist kleiner als 1. Wenn wir jetzt wieder von den unechten Säulen zu den gebändigten Räumen^3 der (x_1, x_2, x_3)-Richtungen übergehen, so sehen wir, daß sie sich stören. Denn unter den Differenzen der x_4-, x_5-, x_6-Koordinaten kommt keine ganze, von Null verschiedene Zahl vor, und wir könnten durch Verschiebungen in den x_4-, x_5-, x_6-Richtungen erreichen, daß ihre echten Würfel in einen einzigen Raum^3 zusammenrücken. Dann ist es aber nicht möglich, daß es in beiden Räumen^3 eine echte nach drei Richtungen ungerade Staffel gibt, denn nach dieser Verschiebung fielen beide in einen Raum^3, aber ein Raum^3 kann nur eine solche Staffel aufnehmen. Enthält also ein gebändigter Raum^3 keine nach drei Richtungen ungerade Staffel, so enthält er echte Säulen.

Damit ist der Satz für $n = 6$ und die Minkowskische Vermutung für $n = 8$ bewiesen.

Eingegangen 3. Oktober 1936.